

PROGRAMME DE RECHERCHE

Je décrit ici une partie de mes projets de recherche. Les autres projets sont un peu moins clairement définis. La numérotation des références est indépendant de celle de mon CV.

1. Points spéciaux et courbes parabolique et flecnodale des surfaces. La classification projective des points des surfaces génériques (par les singularités tangentielles) et de leurs métamorphoses dans des familles génériques de surfaces à un paramètre ([19]) donne la base d'une théorie des bifurcations. Il est naturel de se demander : quels sont, s'ils existent, les invariants locaux d'ordre 1 de type Vassiliev des surfaces génériques ? Est-ce qu'ils existent des invariants d'ordre 1 différents, par exemple, du nombre de godrons ou du nombre de points d'intersection de la courbe flecnodale ?

Pour répondre à ces questions, il faudra d'abord obtenir la classification des points non génériques de codimension 2 (ce qui est faisable d'après les résultats de [18, 19]).

Le fait que la courbe flecnodale consiste de deux parties, qui peuvent être distinguées à niveau local (voir [19]), permet aussi de développer une théorie de bifurcations des courbes flecnodales dans chaque composante connexe du domaine hyperbolique (disque, anneau, bande de Möbius, etc). Un problème intéressant est de savoir s'il existent des invariants locaux de type Vassiliev associés à la courbe flecnodale et de trouver la relation entre ces éventuels invariants et les invariants des "ornements spéciaux" (courbes fermées à plusieurs composantes connexes dans un domaine, telles que chacune d'elles possède un nombre paire de points de contact avec la frontière du domaine, et dont on fixe les métamorphoses locales possibles). Il y a des configurations 'très naturelles' pour les ornements spéciaux qui sont interdites pour la courbe flecnodale ([18]), notamment, *dans un disque hyperbolique la courbe flecnodale ne peut pas être une courbe de Jordan*. Problème : Quelles configurations topologiques des ornements spéciaux sont réalisables par la courbe flecnodale dans un domaine hyperbolique donné d'une surface générique ?

Le problème (d'Arnold) de savoir s'il existe une perturbation du plan projectif ayant une courbe parabolique d'une seule composante et aucun godron est ouvert. Il est similaire, par dualité projective, au problème suivant [7] (R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg) : Existe-il un hérisson projectif dont toutes les singularités sont des arêtes de rebroussement (sans queue d'aronde) ?

Il est envisageable qu'on puisse résoudre ce problème en utilisant soit la théorie des courbes flecnodales réalisables, soit les invariants d'ordre 1 y associés (en les calculant pour une configuration générique connue, par exemple, une perturbation d'une surface cubique).

Dans une direction légèrement différente, la théorie des paires de fibrations legendriennes et de contours apparents dans des variétés de contact 3-dimensionnelles (développée dans [19]) peut s'appliquer pour résoudre l'analogue du "le problème de Mumford" pour les lignes des courbures principales : Quel sont les bifurcations de la courbe des inflexions géodésiques des lignes des courbures principales ?

Un problème naturel est de trouver la théorie analogue à celle des paires de fibrations legendriennes et de contours apparents (de [19]) pour les variétés de contact 5-dimensionnelles.

2. Problème des modules pour les branches planes de Zariski, classification des courbes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, et généralisation de la "tour monstre" de Montgomery-Zhitomirskii.

Le titre du sujet contient en fait trois parties. Chaque partie est un sujet en développement (les deux derniers sujets sont assez récents). Il y a des relations entre les trois sujets qui, à mon avis,

n'ont pas encore été exploitées. Je vais expliquer les contextes, les relations entre ces sujets et l'idée de comment utiliser ces relations.

a. Dans son livre [13], **Zariski** a étudié le problème local de l'espace des modules des branches d'une même classe d'équisingularité, où l'équivalence birationnelle du problème global est remplacé par l'équivalence analytique.

Le problème de la description complète de l'espace des modules d'une classe d'équisingularité donnée est ouvert et les quelques exemples, que Zariski a décrit dans son livre, montrent qu'il a une structure trop complexe pour espérer répondre totalement à la question. La question, plus restrictive, de la détermination de la dimension de sa *composante générique* n'est pas résolue. Cependant, Zariski a obtenu quelques résultats partiels pour les branches à une seule paire caractéristique (n, m) , où n et m sont premiers entre eux. Plus précisément Zariski a déterminé la dimension dans le cas où $m \equiv 1 \pmod{n}$.

Un point important dans cet étude est que toute branche plane ayant pour caractéristique (n, m) est déformation de la branche $C_0 : y^n - x^m = 0$. **B. Teissier**, dans l'appendice du livre de Zariski, essaie de généraliser le résultat de Zariski pour les branches à plusieurs paires caractéristiques. Le point fondamental est que le rôle tenu par C_0 est maintenant tenu par la courbe monomiale, donnée paramétriquement par $U_i = t^{\alpha_i}$ pour $0 \leq i \leq g$, où les α_i forment un système minimal de générateurs du semi-groupe associé à la classe d'équisingularité envisagée. Teissier montre, en utilisant le fait que deux branches planes sont équisingulières si et seulement si elles ont le même semi-groupe, que l'espace des modules de Zariski est un ouvert dense d'un quotient quasi-compact de l'espace des modules D de la courbe monomiale. En plus, en utilisant le fait que D est lisse, Teissier montre comment l'on peut définir la composante générique de l'espace des modules par des considérations de semi-continuité, sans obtenir, cependant, des renseignements sur la dimension de cette composante générique.

b. D'autre part, en 1999 [1], V.I. Arnold a fait la classification des singularités simples des courbes $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ (ce qui était la suite des travaux de Gibson et Hobbs, [4], pour les courbes $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$) et il a trouvé aussi, avec sa méthode des suites spectrales en théorie des singularités, les premiers cas non-simples (qui ont des modules). Il reste beaucoup de travail à faire, mais la méthode des suites spectrales permettra d'avancer.

D'ailleurs, un des premiers cas non-simples trouvés par Arnold coïncide avec le premier exemple non trivial considéré par Teissier dans l'appendice du livre de Zariski. Dans le travail d'Arnold, on considère aussi les déformations des courbes monomiales et les semi-groupes y associés, mais il s'agit d'un point de vue différent.

Je voudrais joindre les deux points de vue. Notamment, l'idée est d'amener le problème de Zariski à l'étude des courbes $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, via les courbes monomiales de Teissier, et alors d'utiliser la méthode des suites spectrales.

c. L'été 2004, Piotr Mormul (Université de Varsovie) a découvert des rapports entre la théorie des k -drapeaux spéciaux, $k \geq 2$, dont les "drapeaux de Goursat" sont un cas particulier, et la classification des singularités simples des courbes $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de [4] et [1]. En fait, Mormul a découvert une coïncidence entre une partie de ses classifications de drapeaux ([10, 11, 12]) et la classification d'Arnold [1] et il a constaté que pour beaucoup des cas cette relation peut s'obtenir par "la prolongation de Cartan" des courbes, mais il n'a pas d'explication, ni de construction intrinsèque (la construction de Mormul dépend du système de coordonnées et de certains "choix appropriés"). Mormul a exposé ses découvertes dans des conférences internationales, et elles seront

bientôt publiées.

D'autre part Richard Montgomery et Misha Zhitomirskii ont construit, d'une manière géométrique et simple (liée à la prolongation de Cartan), une variété qu'ils appellent *tour monstre* [8]. Ils ont prouvé que l'étude des points de cette variété permet de décrire complètement tous les germes des drapeaux de Goursat. Ils ont récemment démontré ([9]) que *chaque classe de singularité dans l'espace des germes de courbes legendriennes, $\mathbb{R} \rightarrow J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$, correspond à une classe de points de la tour monstre.*

Pour le cas des courbes $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, j'ai l'espoir qu'on pourra construire une analogue de la "tour monstre", liée à la prolongation de Cartan, pour classifier les multi-drapeaux de Mormul (et pour expliquer géométriquement leur relation avec la classification d'Arnold).

Il faudra, d'une part, regrouper les derniers développements en ce qui concerne le problème de Zariski (B. Teissier est en train de préparer une version anglaise actualisé du livre de Zariski) et, en suite, étudier les premiers espaces de modules de classes d'équivalence à l'aide de la méthode des suites spectrales (comme j'ai expliqué).

D'autre part, il faudra étudier les premiers exemples de multidrapeaux et ses relations avec les singularités des courbes (et ses prolongations de Cartan) avec le but de construire, pour ces cas, une variété similaire à la tour monstre de Montgomery-Zhitomirskii.

Enfin, l'idée est d'essayer de construire une théorie géométrique qu'unifie tous ces sujets (ma communication scientifique avec Arnold, Teissier et Mormul favorise ce projet).

3. Courbures focales, théorie formelle de Frenet, et l'action des champs magnétiques sur les repères et sur les flots des repères dans les espaces homogènes. Dans mon article [16], j'ai introduit les *courbures focales* d'une courbe γ de \mathbb{R}^n , et avec elles j'ai trouvé des nouvelles formules reliant la courbe γ avec sa courbe focale (qui consiste des centres des hypersphères osculatrices de γ), voir [16]. Les équations scalaires de Frenet satisfaites par les courbures focales (voir [16]), sont liées aux deux théories suivantes (semble-t-il, pas encore publiées comme une unité structurée) : (a) La théorie formelle des repères de Frenet, et (b) L'équation de Poisson comme une équation de Frenet scalaire. Pour avoir une interprétation géométrique de ces théories 'formelles', l'idée c'est de considérer une particule chargée dans une variété riemannienne M et d'étudier, d'une part, les actions des champs magnétiques sur les particules et, d'autre part, les actions des champs magnétiques sur les repères. Pour cela, on considère l'espace de repères sur chaque point de M , qui forment un espace homogène principal de group $SO(N)$ (ou $GL(N)$). On a ainsi une fibration de repères. L'évolution des repères de Frenet par l'action magnétique donne une évolution dans les fibres de cette fibration, qui pourrait être décrite par les équations de Frenet "scalaires" formelles de (a) et (b). Cela donnerais un sens géométrique aux équations "scalaires" de [16]. L'étape suivante serais d'étudier, d'une part, les flots des repères dans les espaces homogènes (comme la sphère, l'espace affine ou l'espace de Lobachevski) et, d'autre part, les équations de Frenet et les connexions dans les fibrés de repères.

4. Graphes et systèmes dynamiques des groupes finis : les monades. Je vais continuer l'étude des systèmes dynamiques et graphes orientés dans le groupes finis (monades), décrite au point 10 de mon rapport sur les travaux effectués [17]. Étant donné un groupe fini arbitraire, la composante connexe de la monade qui contient l'élément unité est un sous-ensemble distingué (invariant par conjugaison). Problème : est-ce que l'ensemble de ses "cosets" possède une structure algébrique ? Supposons que tous les arbres qui équipent les cycles d'une monade de Frobenius (d'un groupe fini G) sont isomorphes à la composante de l'unité. Problèmes : Que peut-on dire

de la structure de groupe de G ? Est-ce que la composante de l'unité et/ou le cœur de la monade (formé par les sommets de tous les cycles) sont des sous-groupes de G ?

Problème : Quelle est la structure combinatoire des composantes connexes de la monade de Frobenius f_k pour le groupe $SL_2(\mathbb{F}_p)$?

Problèmes (E. Ghys) : Quelles sont les monades de Frobenius f_k du groupe de Heisenberg modulo p (p étant un nombre premier) ? Soit M une matrice 2×2 avec des éléments dans \mathbb{F}_p , telle que $\det M \neq 0$. Quelle est la structure combinatoire de la monade définie dans $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ par M ? Quelle est la structure combinatoire de la monade de Frobenius f_k pour les groupes nilpotents ? Pour les p -groupes ?

Problème (J.-C. Yoccoz) : Considérons \mathbb{F}_p . Qu'est-ce qui reste des structures et propriétés des monades de Frobenius dans des groupes finis (décrits dans [17]) pour la monade de l'application $x \mapsto x^2+1$? Les observations expérimentales montrent que la monade de l'application $x \mapsto x^2+1$ ne possède pas les mêmes symétries des monades de Frobenius pour les groupes finis, mais il semble qu'il y a certains symétries qui restent. Il serait intéressant de préciser quelles sont ces symétries et de les étudier.

Question (D. Zagier) : Est-ce que les monades peuvent contribuer (avec des nouveaux résultats, algorithmes,...) à la théorie de réduction des formes quadratiques ? (Bien que D. Zagier m'a encouragé d'essayer, il pense que difficilement on trouvera des nouvelles choses).

5. Théorie des singularités et vision par l'ordinateur. *L'ensemble de symétrie* d'une sous-variété C de \mathbb{R}^n est la fermeture du locus des centres des hypersphères tangentes à C en au moins deux points. Par exemple, l'ensemble de symétrie d'une courbe plane C est la fermeture des centres de cercles tangents à C en au moins deux points.

Le Professeur Peter Giblin a travaillé pour quelques décennies sur les applications de la théorie des singularités à la vision par l'ordinateur. Notamment, il a collaboré avec des mathématiciens comme Mumford (Brown), Damon (Chapel Hill), Bruce et Zakalyukin (Moscou-Liverpool) et avec des ingénieurs et informaticiens comme Cipolla (Cambridge), Kimia (Brown), et d'autres, dans la reconnaissance des formes des surfaces, l'étude des courbes saillantes sur des surfaces, des vues de surfaces illuminées qui bougent, en appliquant des ensembles de symétrie en 2 et 3 dimensions aux problèmes de classification et comparaison de formes (voir par exemple [2, 5, 6]).

D'autre part, dans mon article [19] j'ai résolu un problème posé par Mumford dans le contexte de la reconnaissance de formes, et P. Giblin a trouvé que les techniques développées en [14, 15, 18, 19] sont directement applicables à l'étude des ensembles de symétrie et leur métamorphoses. Nous avons donc commencé une collaboration qui a déjà produit des résultats intéressants [3], mais c'est juste le début.

Soit p un point d'une surface générique lisse $M \subset \mathbb{R}^3$. Les intersections de M avec la famille de plans parallèles au plan tangent en p , nous donnent une famille de courbes planes C_t contenant un membre singulier C_0 (correspondant au plan tangent lui-même). Le membre singulier C_0 dépend de la géométrie de M en p : étant un point isolé pour un point elliptique ou un godron positif ; une paire de courbes lisses transverses pour un point hyperbolique ; un point de rebroussement pour un point parabolique ; et deux courbes lisses tangentes pour un godron négatif.

Nous envisageons d'utiliser la théorie des singularités pour obtenir toute l'information possible sur les familles de sections planes de M .

Nous connaissons beaucoup sur l'évolution des sommets et inflexions de ces courbes [3]. Par exemple, dans le domaine hyperbolique d'une surface il est possible d'avoir quatre différents

formes génériques d'évolution des sommets et inflexions évanescents des sections C_t , quand $t \rightarrow 0$. Les domaines de M où ces différents évolutions arrivent (pouvant avoir plusieurs composantes connexes) sont séparés par les branches de la courbe flecnodale et par la *courbe des sommets* V (formée par les points hyperboliques où l'une des courbes lisses transverses formant C_t possède un sommet). Pour une surface générique M , la courbe V est lisse avec des auto-intersections transverses. Très peu est connu sur cette courbe, malgré qu'elle est un invariant Euclidien assez basique. Une des tâches du projet est l'étude de cette courbe.

L'intention est d'obtenir plus d'information en examinant les ensembles de symétrie des courbes C_t pour $t \rightarrow 0$.

La motivation de ce projet vient des problèmes de vision par l'ordinateur, où l'on considère la surface d'intensité $z = f(x, y)$ associée à la fonction d'intensité f d'une image 2-dimensionnelle, et les courbes planes C_t sont des ensembles de niveau de f , appelées *isophotes*.

Un problème assez intéressant est de comprendre la structure de l'ensemble de symétrie des courbes C_t quand $t \rightarrow 0$ au voisinage d'un point ombilique, par exemple $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + \text{h.o.t.}$ Pour $t < 0$ les sections C_t par les plans $z = t$ sont vides (près de l'origine). On constate expérimentalement que pour $t > 0$ assez petit, l'ensemble de symétrie possède six "end-points", deux croisements triples et six points de rebroussement, mais il n'y a pas de preuve rigoureuse de cela. Y a-t-il une seule configuration possible de l'ensemble de symétrie, connectant ces caractéristiques ?

Références

- [1] V.I. ARNOLD, *Simple singularities of curves*. Proc. Steklov Inst. Math., **226** no. 3 (1999) 20-28.
- [2] J.W. BRUCE and P.J. GIBLIN, *Growth, motion and one-parameter families of symmetry sets*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 104A (1986), 179-204.
- [3] P. GIBLIN, R. URIBE-VARGAS, *On tangent sections of a surface and its vertex curve*, en préparation.
- [4] C.G. GIBSON, C.A. HOBBS, *Simple singularities of space curves*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 113 (1993), 297-310.
- [5] P.L.HALLINAN, G.G.GORDON, A.L.YUILLE, P.GIBLIN and D.MUMFORD, *Two and three dimensional patterns of the face*, viii+262 pages, Natick, Massachusetts : A.K.Peters 1999.
- [6] A. KUIJPER, O. F. OLSEN, P. GIBLIN and M. NEILSEN, *Alternative 2D Shape Representations using the Symmetry Set*, Journal of Math. Imaging and Vision, 26 (2006), 127-147.
- [7] R. LANGEVIN, G. LEVITT, H. ROSENBERG, *Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss)*, Singularities (Warsaw, 1985), Banach Center Publ., **20** (1988) 245-253.
- [8] R. MONTGOMERY, M. ZHITOMIRSKII, *Geometric approach to Goursat flags*, Ann. I.H.Poincaré-AN 18, 4 (2001) 459-493.
- [9] R. MONTGOMERY, M. ZHITOMIRSKII, *Points and Curves in the Monster Tower*, submitted to Memoirs of the AMS (2006).
- [10] P. MORMUL, *Multi-dimensional Cartan prolongation and special k-flags*, Geometric Singularity Theory, Banach Center Publ. **65** (2004) 157-178.
- [11] P. MORMUL, *Geometric classes of Goursat flags and the arithmetics of their encoding by small growth vectors*, Preprint.
- [12] P. MORMUL, *Geometric classes of special k-flags, $k \geq 2$, of arbitrary length*, Preprint.
- [13] B. TEISSIER, O. ZARISKI, *Le Probleme des modules pour les branches planes*, Hermann, Paris.
- [14] R. URIBE-VARGAS, *On the Stability of Bifurcation Diagrams Associated to Vanishing Singularities*, Funct. Anal. and its Appl., **37** :3, 2003, pp. 236-240.
- [15] R. URIBE-VARGAS, *On Polar Duality, Lagrange and Legendre Singularities and Stereographic Projection to Quadrics*, Proc. London Math. Soc., **87** :3, November, 2003, 701-724.

- [16] R. URIBE-VARGAS, *On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry of Space Curves*, Bull. of the Brazilian Math. Soc., **36** :3, (2005) 285-307.
- [17] R. URIBE-VARGAS, *Topology of Dynamical Systems in Finite Groups and Number Theory*. Bull. Sci. Math. **130** :5 (2006) 377-402.
- [18] R. URIBE-VARGAS, *A Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flec-nodal Curve*. Moscow Math. Journal, **6** :4 (2006) 731-768.
- [19] R. URIBE-VARGAS, *Surface Evolution, Implicit Differential Equations and Pairs of Legendrian Fibrations*, Preprint.