

Sur l'effectivité du théorème de Siegel et la conjecture abc

Andrea Surroca

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

26 octobre 2005

Résumé. Nous montrons qu'un raffinement du théorème de Siegel sur les points entiers de courbes algébriques impliquerait la conjecture abc de Masser-Oesterlé. Nous formulons une hypothèse "Siegel uniforme" qui est une majoration de la hauteur des points S -entiers de la courbe, en termes du corps de rationalité et de l'ensemble de places S . La validité de l'hypothèse pour une quelconque courbe algébrique de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative, impliquerait une version de la conjecture abc . Ceci étend aux points S -entiers des résultats précédents de L. Moret-Bailly [16], et est en quelque sorte, un énoncé réciproque de ce que nous avons montré dans [26], en suivant les idées proposées par N. Elkies [6]. Le principal outil géométrique employé est un théorème de G.V. Belyĭ. Nous montrons aussi quelques versions inconditionnelles de ces énoncés : un résultat allant dans le sens de la conjecture abc , valable sur tout corps de nombres, ainsi que des bornes pour la hauteur des solutions en S -entiers de certaines équations diophantiennes classiques.

Mots clefs : Théorème de Siegel, conjecture abc , fonction de Belyĭ, bornes uniformes de points S -entiers.

1 Introduction.

Étant donnée une courbe algébrique affine U définie sur un corps de nombres K , de genre g et ayant t points "à l'infini", C.L. Siegel démontra [22] que *si la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(U) = 2 - 2g - t$ est strictement négative, alors la courbe U n'a qu'un nombre fini de points entiers*. Grâce à K. Mahler, le théorème a été étendu aux points S -entiers.

La démonstration du théorème de Siegel, tout comme celle du théorème de Faltings (conjecture de Mordell), ne fournit pas un moyen de trouver les points et, dans le cas général, ceci demeure un problème ouvert. Dans le cas des points rationnels, des liens ont été établis entre la question de l'effectivité et la célèbre conjecture abc de D. Masser et J. Oesterlé ([15] et [17]). Notons h_K la hauteur (logarithmique) de Weil et rad_K le radical (ou support) sur l'espace $\mathbf{P}^2(K)$. (Des notations plus détaillées se trouvent dans la section 2.)

Conjecture 1.1. (abc) *Étant donné un corps de nombres K et un nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_{\varepsilon, K} > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) de nombres algébriques dans K , non nuls, tels que $a + b = c$, on ait*

$$h_K(a : b : c) < (1 + \varepsilon) \text{rad}_K(a : b : c) + c_{\varepsilon, K}.$$

L. Moret-Bailly [16] montra qu'une hypothèse du type "Mordell effectif" sur la courbe d'équation $y^2 + y = x^5$ impliquerait une version de la conjecture abc . Par ailleurs, N. Elkies [6] montra comment il serait possible de majorer la hauteur des points rationnels d'une courbe

de genre supérieur ou égal à 2, en supposant vraie la conjecture 1.1. Les outils employés par N. Elkies sont essentiellement la théorie des hauteurs et un théorème de G. V. Belyĭ [1].

Théorème 1.2. (Belyĭ) *Une courbe algébrique projective C est définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ si et seulement s'il existe un morphisme fini et surjectif $f : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ non ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$. De plus, étant donné un ensemble Σ de points algébriques de C , on peut choisir f tel que $f(\Sigma) \subset \{0, 1, \infty\}$.*

La construction d'une telle fonction de Belyĭ est totalement explicite et montre que, si C est définie sur un corps de nombres K , alors la fonction f peut être choisie définie sur K .

En suivant les idées de [6], nous avons montré, dans un travail antérieur [26], comment la conjecture 1.1 impliquerait une version effective du théorème de Siegel. Il s'agit d'une majoration de la hauteur des points S -entiers des courbes algébriques de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative, en termes du corps de rationalité et de l'ensemble de places S . Réciproquement, nous formulons dans ce travail une hypothèse du type "Siegel uniforme", où la borne de la hauteur des points S -entiers serait uniforme en l'ensemble de places S . L'analogue de l'hypothèse 1.3 ci-dessous, dans la théorie des corps de fonctions, est un théorème (cf. la section 3 pour des références).

Fixons une courbe U définie sur un corps de nombres K et vérifiant les hypothèses du théorème de Siegel, et une fonction hauteur h_U définie sur U et associée à un diviseur de degré 1.

Hypothèse 1.3. "Siegel Uniforme" (U, K)

Pour tout entier naturel $\delta \geq 1$, il existe des réels $k_1(U, h_U, \delta) > 1$, $k_2(U, h_U, \delta) > 1$ et $k_3(U, h_U, \delta) > 0$ tels que, pour toute extension finie L/K de degré $[L : K] \leq \delta$, pour tout sous-ensemble fini S de places de L et pour tout point S -entier x de U , on a

$$h_{U,L}(x) \leq k_1 \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N_{L/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}) + k_2 \log D_L + k_3,$$

où D_L est la valeur absolue du discriminant du corps L , et $h_{U,L} = [L : \mathbf{Q}]h_U$.

Dans la section 3 nous montrons comment l'hypothèse 1.3 impliquerait une forme de la conjecture *abc*, ce qui étend aux points S -entiers et à toute courbe de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative le résultat de L. Moret-Bailly.

Théorème 1.4. *Soient K un corps de nombres, U une courbe algébrique affine définie sur K telle que $\chi(U) < 0$ et h_U une hauteur définie sur U associée à un diviseur de degré 1.*

Supposons vérifiée l'hypothèse 1.3 pour la courbe U .

Pour tout triplet (a, b, c) d'éléments non nuls du corps K vérifiant $a + b = c$, on a

$$h_K(a : b : c) \leq \eta_1 \text{rad}_K(a : b : c) + \eta_2 \log D_K + \eta_3,$$

où le nombre η_2 ne dépend que du degré d de la fonction de Belyĭ associée à la courbe U , et les nombres η_1 et η_3 dépendent en plus de d et de $[K : \mathbf{Q}]$, de la courbe U .

Dans le cas particulier, mais crucial, de la droite projective privée de trois points, nous montrons les **théorèmes 4.1** et **4.2**, qui donnent l'équivalence entre

i) une version de la conjecture *abc*,

ii) une majoration de la hauteur des points S -entiers de $U = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, valable pour tout ensemble S , et

iii) une majoration de la hauteur des S -unités solutions de l'équation $u + v = 1$, valable pour tout ensemble S .

Nous obtenons aussi des versions faibles, mais inconditionnelles de ces résultats. Premièrement, un énoncé allant dans le sens de la conjecture abc , valable sur tout corps de nombres. Un tel résultat n'était connu que pour $K = \mathbf{Q}$. Cf. [23] et [24].

Théorème 1.5. *Pour tout corps de nombres K , il existe des nombres réels γ_1, γ_2 et γ_3 effectivement calculables, tels que, pour tout triplet (a, b, c) de nombres algébriques non nuls appartenant à K et tels que $a + b = c$, on ait*

$$h_K(a : b : c) \leq \exp\{\gamma_1 \operatorname{rad}_K(a : b : c) + \gamma_2 \log D_K + \gamma_3\}.$$

On peut choisir γ_1 et γ_3 de la forme $\alpha[K : \mathbf{Q}]$, avec α constante absolue effectivement calculable et $\gamma_2 = 2[K : \mathbf{Q}] - 1$. On peut aussi choisir γ_2 indépendante de $[K : \mathbf{Q}]$ (cf. la remarque 6.4).

Nous en déduisons ensuite une majoration de la hauteur des points S -entiers de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (**corollaire 6.5**) et des majorations de la hauteur des solutions S -entières de plusieurs équations diophantiennes classiques (cf. la section 6.3).

Ce travail est organisé de la façon suivante. Dans la section 2 nous fixons les notations utilisées concernant les corps de nombres, définissons quelques notions de hauteur, ainsi que le radical. Nous y démontrons quelques lemmes préliminaires, dont une version affine du théorème de Chevalley-Weil et un lemme concernant le discriminant d'une extension de corps de nombres, qui nous seront utiles à plusieurs reprises.

Dans la section 3, nous expliquons les motivations à l'hypothèse 1.3 et donnons la démonstration du théorème 1.4. L'étude du cas particulier où la courbe est la droite projective privée de 0, 1 et l'infini se trouve dans la section 4. Dans la section 5, nous rendons effectifs, en termes de hauteur, les énoncés permettant de déduire la finitude des points entiers d'une courbe à partir de celle d'une autre, si certains morphismes lient les deux courbes.

La dernière section est consacrée à des applications des résultats précédents. Dans le premier paragraphe de la section 6, se trouve la démonstration du théorème 1.5. Au paragraphe 6.2 nous énonçons le résultat sur les courbes de genre nul. On énonce ensuite, au paragraphe 6.3, les résultats concernant d'autres courbes.

2 Notations et préliminaires.

Dans tout le texte, K désigne un corps de nombres, D_K la valeur absolue de son discriminant et M_K l'ensemble de classes d'équivalence de ces valeurs absolues normalisées de façon à ce que la formule du produit pour un élément non nul x de K s'écrive $\prod_{v \in M_K} |x|_v^{d_v} = 1$, où d_v est le degré local en la place v .

Notons \mathcal{P}_K l'ensemble des idéaux premiers de K et \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Si $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K$ divise le nombre premier p (i.e. $\mathfrak{p}|p$), on note $e_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(p)$ l'indice de ramification de \mathfrak{p} au-dessus de p et $f_{\mathfrak{p}}$ le degré du corps résiduel. Alors

$$d_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbf{Q}_p] = e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}, \quad \sum_{\mathfrak{p}|p} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} = [K : \mathbf{Q}] \quad \text{et} \quad N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}) = p^{f_{\mathfrak{p}}}. \quad (1)$$

On pose $|x|_{\mathfrak{p}} = p^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(x)/e_{\mathfrak{p}}}$ et, pour toute place v de M_K , on pose $v(x) = -\log |x|_v$, avec la convention $v(0) = \infty$.

Si S est un ensemble fini de places du corps K contenant les places archimédiennes, O_K et $O_{K,S}$ désignent respectivement l'anneau des entiers et l'anneau des S -entiers de K .

Si v est une place ultramétrique de K correspondant à l'idéal premier \mathfrak{p} , $N(v) = N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p})$ désigne la norme de l'idéal \mathfrak{p} (et on identifie v à \mathfrak{p}). Si v est une place archimédienne, on pose $N(v) = 1$. Souvent dans le texte, on considérera

$$\Sigma_S = \sum_{v \in S} \log N(v).$$

Si L est une extension finie de K , et S' est l'ensemble de places de L qui étendent celles de S , alors $\Sigma_{S'} = \sum_{\mathfrak{p} \in S} \sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \log N(\mathfrak{q}) \leq \sum_{\mathfrak{p} \in S} \sum_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \frac{f_{\mathfrak{q}}}{f_{\mathfrak{p}}} \log N(\mathfrak{p}) \leq [L : K] \Sigma_S$, i.e.

$$\Sigma_{S'} \leq [L : K] \Sigma_S. \quad (2)$$

On note $P(S) = \{p \in \mathcal{P} / \exists \mathfrak{p} \in S, \mathfrak{p}|p\}$ l'ensemble des caractéristiques résiduelles de S , et P leur maximum. On montre facilement que

$$([K : \mathbf{Q}] \text{card}(P(S)))^{-1} \Sigma_S \leq \log P \leq \Sigma_S, \quad (3)$$

et aussi que

$$\text{card}(S) \leq [K : \mathbf{Q}] \text{card}(P(S)). \quad (4)$$

On note $h : \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow [0, \infty)$ la hauteur logarithmique absolue de Weil, et, pour x dans $\mathbf{P}^n(K)$, on note $h_K(x) = [K : \mathbf{Q}] h(x)$ la hauteur relative à K . Avec ces notations,

$$h_L(x) = [L : K] h_K(x). \quad (5)$$

Si α est un nombre algébrique, $h(\alpha) = h(\alpha : 1)$. Si a, b, c sont des éléments non nuls de K tels que $a + b = c$, on démontre localement que

$$h_K(a : b : c) \leq h_K(a : c) + [K : \mathbf{Q}] \log 2. \quad (6)$$

Pour un point $P = (x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2(K)$, on définit (cf. [6]) le *radical* de P par :

$$\text{rad}_K(P) = \sum_{\mathfrak{p} \in I} \log N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}),$$

où $I = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / \text{card}\{v_{\mathfrak{p}}(x_0), v_{\mathfrak{p}}(x_1), v_{\mathfrak{p}}(x_2)\} \geq 2\}$. Il dépend du corps de rationalité K . Si a, b et c sont des entiers rationnels premiers entre eux, on a $\text{rad}_{\mathbf{Q}}(a : b : c) = \log \prod_{p|abc} p$.

Pour tout r appartenant à K , on pose $P_r = (r : 1 - r : 1) \in \mathbf{P}^2(K)$ et on peut montrer facilement que

$$\text{rad}_K(P_r) = \sum_{\mathfrak{p} \in H_r} \log N(\mathfrak{p}), \quad (7)$$

où $H_r = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(r) < 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(r) > 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(1 - r) > 0\}$.

Le lemme 2.1 sert à démontrer le théorème 1.5 et le lemme 2.2. Ce dernier intervient dans les démonstrations du théorème 1.4 et de la proposition 5.3.

Lemme 2.1. *Il existe un nombre réel strictement positif, noté dans toute la suite c_0 , tel que pour tout corps de nombres K , tout ensemble fini S de places ultramétriques de K , si $\text{card}(P(S)) \geq 3$, alors*

$$\text{card}(P(S)) \leq c_0 \frac{\Sigma_{P(S)}}{\log \Sigma_{P(S)}} \leq c_0 \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S}.$$

Démonstration du lemme 2.1.

On note $r = \text{card}(P(S))$ et on remarque que $\Sigma_{P(S)}$ est supérieur ou égal à la somme T_r des logarithmes des r plus petits nombres premiers, et que $\Sigma_S = \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) = \sum_{p \in P(S)} \sum_{\mathfrak{p}|p} f_{\mathfrak{p}} \log p \geq \sum_{p \in P(S)} \log p = \Sigma_{P(S)}$.

De plus, pour $x \geq e$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{\log x}$ est croissante, et comme, pour $r \geq 3$, on a $e \leq T_r \leq \Sigma_{P(S)} \leq \Sigma_S$, alors, d'après le théorème des nombres premiers, on obtient

$$\frac{r}{c_0} \leq \frac{T_r}{\log T_r} \leq \frac{\Sigma_{P(S)}}{\log \Sigma_{P(S)}} \leq \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S}.$$

□

Lemme 2.2. *Soit L/K une extension de corps de nombres. Notons $\delta_{L/K}$ son discriminant relatif et $R = R_{L/K}$ l'ensemble des places de M_K correspondant aux idéaux premiers au-dessus desquels l'extension se ramifie, c'est-à-dire tels que $v_{\mathfrak{p}}(\delta_{L/K}) > 0$. On désigne par $P(R)$ l'ensemble des caractéristiques résiduelles de R . Si $\text{card}(P(R)) \geq 3$, alors*

$$\log D_L \leq [L : K] \left(\log D_K + \Sigma_R + c_0 [K : \mathbf{Q}] \log[L : K] \frac{\Sigma_R}{\log \Sigma_R} \right).$$

Démonstration du lemme 2.2.

On a $\log D_L = \log N_{K/\mathbf{Q}}(\delta_{L/K}) + [L : K] \log D_K$ et $N_{K/\mathbf{Q}}(\delta_{L/K}) = \prod_{\mathfrak{p} \in R} N(\mathfrak{p})^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\delta)}$. D'après le corollaire à la proposition 2, §1 de [21],

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\delta_{L/K}) \leq [L : K] - 1 + [L : K] e_{\mathfrak{p}} \frac{\log[L : K]}{\log p},$$

d'où

$$\begin{aligned} \log N_{K/\mathbf{Q}}(\delta_{L/K}) &\leq \sum_{\mathfrak{p} \in R} \left([L : K] + [L : K] e_{\mathfrak{p}} \frac{\log[L : K]}{\log p} \right) \log N(\mathfrak{p}) \\ &= [L : K] \left(\sum_{\mathfrak{p} \in R} \log N(\mathfrak{p}) + \log[L : K] \sum_{\mathfrak{p} \in R} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \right) \\ &= [L : K] \left(\Sigma_R + \log[L : K] \sum_{p \in P(R)} \sum_{\mathfrak{p}|p} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \right) \\ &= [L : K] (\Sigma_R + [K : \mathbf{Q}] \log[L : K] \text{card}(P(R))). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme 2.1 à l'ensemble des places R . □

Dans toute la suite, U désigne une courbe algébrique affine de genre g définie sur K , \tilde{U} la normalisée de U et C la courbe complète la contenant. On notera $U_{\infty} = C \setminus \tilde{U} = \{P_1, \dots, P_t\}$ l'ensemble des "points à l'infini".

On notera h_U une fonction hauteur définie sur la courbe U relative à un diviseur de degré 1. Par exemple, on peut prendre

$$h_U = h_f = \frac{1}{\deg(f)} h \circ f,$$

où $f \in K(U)$ est une fonction non constante sur U et h est la hauteur sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ définie précédemment. Si g est une autre fonction non constante sur U , on a (cf., par exemple, le théorème B.5.9 de [12]), pour tout x de $U(K)$,

$$|h_g(x) - h_f(x)| \leq c\sqrt{h_f(x)}, \quad (8)$$

où la constante c ne dépend que de la courbe U et des fonctions g et f .

Soit $D \in \text{Div}(C)$ un diviseur très ample dont le support $\text{supp}(D)$ est l'ensemble des points U_∞ . On notera $U(O_{K,S})$ l'ensemble des points K -rationnels de la courbe U qui ont des coordonnées dans l'anneau $O_{K,S}$ des S -entiers par rapport au plongement affine $\Phi_D : U \hookrightarrow \mathbf{A}^n$, donné par D .

Notons \mathcal{C} un modèle de C au-dessus de $\mathcal{S} = \text{Spec}(O_{K,S})$, c'est-à-dire que $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ est un schéma projectif et plat, tel que sa fibre générique est isomorphe à C . Alors $\mathcal{U} = \mathcal{C} \setminus \overline{\text{supp}(D)}^{\text{Zar}} \rightarrow \mathcal{S}$ est un schéma dont la fibre générique est isomorphe à U .

Un point x de $U(K)$ est S -entier si et seulement s'il se prolonge en une section σ_x au-dessus de \mathcal{S} . Dans ce cas là, pour tout idéal premier \mathfrak{p} correspondant à une place v de S , le point x est \mathfrak{p} -entier (i.e. $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$) et $\sigma_x(\mathfrak{p})$ appartient à la fibre spéciale $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$. Nous identifions l'ensemble des points S -entiers de la courbe U avec l'ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ des morphismes de \mathcal{S} dans \mathcal{U} au-dessus de $\text{Spec}(K)$, via l'isomorphisme

$$\begin{aligned} U(O_{K,S}) &\simeq \mathcal{U}(\mathcal{S}) \\ x &\mapsto \sigma_x. \end{aligned}$$

Pour les démonstrations du théorème 1.4 et de la proposition 5.3, nous aurons besoin des lemmes 2.4 et 2.5. Nous démontrons ce dernier en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K . Les revêtements étales de $\text{Spec}(O_{K,S})$ sont des réunions finies de $\text{Spec}(O_{L,S'})$ où L/K est une extension finie, de degré $[L : K]$ inférieur ou égal au degré du revêtement, non ramifiée en dehors de l'ensemble S , et $S' = \{w \in M_L / \exists v \in S, w|v\}$.*

Démonstration du lemme 2.3.

On pose $A = O_{K,S}$ et $Y = \text{Spec}(A)$. Soit X un revêtement étale de Y et $X = \cup_{i \in I} X_i$ sa décomposition en composantes connexes. L'ensemble I est fini et, pour tout $i \in I$, X_i est un revêtement étale connexe de Y .

Soit $i \in I$. On note $L_i = R(X_i)$ l'anneau des fonctions rationnelles de X_i et Y'_i le normalisé de Y dans L_i . D'après le corollaire 10.2 de [9] I, X_i est isomorphe à Y'_i . Or, d'après le corollaire 10.3 de [9] I, le foncteur $X \mapsto R(X)$ établit une équivalence entre la catégorie des revêtements étales connexes de Y et celle des extensions finies L/K non ramifiées sur $Y = \text{Spec}(O_K) \setminus S$, donc L_i/K est une extension finie non ramifiée en dehors de S .

Comme le foncteur inverse est le foncteur normalisation, alors X_i a pour anneau le normalisé A'_i de A dans L_i , i.e. $X_i = \text{Spec}(A'_i)$ où $A'_i = O_{L_i, S'_i}$, et S'_i est l'ensemble de places du corps L_i qui sont au-dessus de celles de S .

On a donc, $X = \cup_{i \in I} \text{Spec}(O_{L_i, S'_i})$, ce qui démontre le lemme. □

Lemme 2.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de courbes projectives, défini sur un corps de nombres K . Il existe un ensemble fini S_0 de places de K et des modèles \mathcal{X} et \mathcal{Y} de X et de Y au-dessus de $\mathcal{B} = \text{Spec}(O_{K,S_0})$ tels que f se prolonge en un morphisme $\tilde{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et, de plus,

i) si f est fini, il en est de même de \tilde{f} , et dans ce cas, $\deg(f) = \deg(\tilde{f})$,

ii) si, en plus, f est non ramifié en dehors des points $\{P_1, \dots, P_r\}$ de Y , alors, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$, le morphisme \tilde{f} restreint à la fibre $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ est non ramifié en dehors de $\{\sigma_{P_1}(\mathfrak{p}), \dots, \sigma_{P_r}(\mathfrak{p})\}$. Dans ce cas, $\mathcal{X} \setminus \overline{f^{-1}(\{P_1, \dots, P_r\})}^{\text{Zar}} \rightarrow \mathcal{Y} \setminus \overline{\{P_1, \dots, P_r\}}^{\text{Zar}}$ est un revêtement étale.

La démonstration du lemme 2.4 repose sur le fait que si un nombre, un discriminant, par exemple, est non nul, il en sera de même pour sa réduction modulo p , pour tout nombre premier p sauf un nombre fini. On dit souvent que X, Y et f ont “bonne réduction” en dehors de S_0 .

Le lemme suivant est la version affine du théorème de Chevalley-Weil (cf. [20] §4.2).

Lemme 2.5. Soient K un corps de nombres, S_0 un ensemble fini de places de K et $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ un revêtement étale de courbes affines défini sur $\text{Spec}(O_{K,S_0})$. Soient S_1 un ensemble fini de places de K , y un point S_1 -entier de la fibre générique de \mathcal{W} et x un point de $\mathcal{V}_{\eta}(\overline{\mathbf{Q}})$ qui relève y .

Alors le corps de définition $L = K(x)$ du point x est une extension finie de K de degré $[L : K] \leq \deg(\phi)$, non ramifiée en dehors de l'ensemble $S = S_1 \cup S_0$. De plus, le point x se prolonge en une section σ_x au-dessus de $O_{L,S'}$ où $S' = \{w \in M_L / \exists v \in S, w|v\}$.

Démonstration du lemme 2.5.

Le point y étant S -entier, où $S = S_0 \cup S_1$, il nous fournit un morphisme de $\text{Spec}(O_{K,S})$ dans \mathcal{W} . Considérons le produit fibré de \mathcal{V} par $\text{Spec}(O_{K,S})$ au-dessus de \mathcal{W} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(O_{K,S}) \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spec}(O_{K,S}) & \longrightarrow & \mathcal{W}. \end{array}$$

Le schéma $\text{Spec}(O_{K,S}) \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V}$ est obtenu à partir de \mathcal{V} par changement de base ; le morphisme $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ étant un revêtement étale, il en est donc de même de $pr_1 : \text{Spec}(O_{K,S}) \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V} \rightarrow \text{Spec}(O_{K,S})$ (cf. [9] IX proposition 1.3). De plus, le degré du morphisme pr_1 est égal à celui de ϕ .

D'après le lemme 2.3, $\text{Spec}(O_{K,S}) \times_{\mathcal{W}} \mathcal{V} = \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(O_{L_i, S'_i})$, où, pour tout $i \in I$, l'extension L_i/K est finie, de degré $[L_i : K] \leq \deg(pr_1) = \deg(\phi)$, non ramifiée en dehors de l'ensemble S , et $S'_i = \{w \in M_{L_i} / \exists v \in S, w|v\}$.

Par ailleurs, le point x de \mathcal{V} à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$ correspond à un morphisme $\text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathcal{V}$, et l'inclusion $O_{K,S} \subset \overline{\mathbf{Q}}$, nous fournit un autre morphisme $\iota : \text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow \text{Spec}(O_{K,S})$. Par la propriété universelle du produit fibré, on en déduit qu'il existe un morphisme $\text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(O_{L_i, S'_i})$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) & & \\ \downarrow \iota & \searrow x & \\ \bigcup_{i \in I} \text{Spec}(O_{L_i, S'_i}) & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spec}(O_{K,S}) & \longrightarrow & \mathcal{W}. \end{array}$$

Le spectre d'un corps étant réduit à un point, le schéma $\text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) = \{(0)\}$ s'envoie sur une des composantes connexes de $\bigcup_i \text{Spec}(O_{L_i, S'_i})$, disons sur $\text{Spec}(O_{L, S'})$.

Ainsi, le morphisme $x : \text{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathcal{V}$ se factorise par $\text{Spec}(O_{L, S'})$, ce qui revient à dire que x se prolonge en une section de \mathcal{V} au-dessus de $\text{Spec}(O_{L, S'})$. Ceci démontre le lemme 2.5. \square

3 De “Siegel uniforme” à abc .

Dans le but d'étendre le résultat de L. Moret-Bailly [16] aux points S -entiers, nous avons cherché à formuler un raffinement du théorème de Siegel. En suivant les lignes suggérées par N. Elkies (cf. [6] et aussi [8]), nous montrons dans [26] que la conjecture 1.1 impliquerait une version effective du théorème de Siegel, i.e. une borne pour la hauteur des points S -entiers, où la dépendance en l'ensemble de places S est mise en évidence. De plus, si le nombre $c_{\varepsilon, K}$ de la conjecture 1.1 était explicite, cette borne serait elle aussi explicite.

On peut essayer de préciser qu'elle pourrait être la dépendance en K de $c_{\varepsilon, K}$. D.W. Masser [15], en définissant un radical *ramifié*, montre qu'il faut faire apparaître le logarithme de la valeur absolue D_K du discriminant avec un coefficient > 1 . Considérons ce raffinement de la conjecture abc , ce qui donnerait, avec la définition de radical de la section 2 (cf. [15] (1.12)), $c_{\varepsilon, K} \leq 2(1 + \varepsilon) \log D_K + k_{\varepsilon, [K: \mathbf{Q}]}$. En rajoutant ceci dans la preuve du théorème 1 de [26], nous obtenons l'énoncé suivant.

Théorème 3.1. *Soient K un corps de nombres, U une courbe algébrique affine définie sur K telle que $\chi(U)$ soit strictement négative, S un ensemble fini de places de K et $h_{U, K}$ une fonction hauteur définie sur $U(K)$ associée à un diviseur de degré 1.*

Supposons vraie la conjecture 1.1, avec $c_{\varepsilon, K} \leq 2(1 + \varepsilon) \log D_K + k_{\varepsilon, [K: \mathbf{Q}]}$, où le nombre $k_{\varepsilon, [K: \mathbf{Q}]}$ ne dépend que de ε et du degré $[K: \mathbf{Q}]$.

Pour tout $\varepsilon \in]0, -\chi(U)[$ et tout point S -entier x de U , il existe une constante κ ne dépendant que du degré $[K: \mathbf{Q}]$, de la courbe U , du choix de la hauteur $h_{U, K}$ et de ε , telle que

$$h_{U, K}(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon + \chi(U)} \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}) - \frac{2}{\varepsilon + \chi(U)} \log D_K + \kappa. \quad (9)$$

De plus, si le nombre $k_{\varepsilon, [K: \mathbf{Q}]}$ était effectif, il en serait de même pour κ .

En nous inspirant d'une part par l'hypothèse du type “Mordell effectif” formulée par L. Moret-Bailly dans [16] et, d'autre part, par la borne (9), nous formulons l'hypothèse 1.3. Nous montrons ensuite (théorème 1.4) comment une telle borne, valable sur une courbe donnée, impliquerait une version faible de la conjecture 1.1.

Remarque 3.2. 1) L'hypothèse 1.3 est indépendante de la fonction hauteur choisie. (Cf. l'inégalité (8) de la section 2.)

2) L'hypothèse 1.3 est trivialement fautive si on ne suppose pas $\chi(U) < 0$.

L'hypothèse 1.3 peut être vue comme l'analogie de plusieurs résultats concernant les corps de fonctions. On y voit apparaître, en particulier, la dépendance en l'ensemble de places S . (Cf., par exemple, l'appendice de [25] pour des énoncés plus détaillés.)

Théorème 3.3. Soient $K = k(B)$ un corps de fonctions, C une courbe définie sur K et h une fonction hauteur définie sur C associée à un diviseur de C de degré 1. Soit U un ouvert affine de C tel que $\chi(U) < 0$. Alors pour toute extension finie $L = k(B')$ de K et tout ensemble fini S de places de L , on a, pour tout point S -entier P de $U(O_{L,S})$,

$$h_L(P) \leq c_1 \text{card}(S) + c_2 (2g_L - 2) + c_3,$$

où $h_L = [L : K]h$ et $g_L = g(B')$ désigne le genre de l'extension L et les nombres c_1 et c_2 ne dépendent que de la courbe U et c_3 dépend de U , du choix de la hauteur h et du degré $[L : K]$.

Remarquons que $2g_L - 2$ (respectivement $\text{card}(S)$) est l'analogie pour les corps de fonctions de $\log D_L$ (resp. $\sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p})$).

Le théorème 3.3 résulte de trois types de résultats connus. Dans le cas où le genre est nul et que la courbe a au moins trois points à l'infini, on peut prendre $c_1 = c_2 = 1 = \frac{1}{-\chi(U)}$. (C'est essentiellement le théorème de R.C. Mason (lemme 2 de [14]), analogue de la conjecture *abc*.) Dans le cas où g et t sont égaux à 1, on peut prendre $c_1 = c_2 = 2 = \frac{2}{-\chi(U)}$. (Voir, par exemple, le résultat de M. Hindry et J. Silverman [11].) Dans le cas où le genre g est supérieur ou égal à 2 et t est nul, on peut prendre $c_1 = 0$ et $c_2 = \frac{2+\varepsilon}{-\chi(U)}$ (cf. les travaux de P. Vojta [28], L. Szpiro [27] et H. Esnault et E. Viehweg [7]).

D'après la borne (9) ainsi que les résultats sur les corps de fonctions ici mentionnés, une version optimiste de l'hypothèse 1.3 serait de considérer des constantes k_1 et k_2 indépendantes de δ , peut-être dépendant que de la caractéristique d'Euler-Poincaré de la courbe. (Le nombre c_3 dépendra de la courbe, du choix de la fonction hauteur et du degré de l'extension de corps de nombres.)

Démonstration du théorème 1.4.

Soit U une courbe affine définie sur un corps de nombres K , de genre g et ayant t points à l'infini, notés $\{P_1, \dots, P_t\}$, et telle que $\chi(U) < 0$. Soit C la courbe projective la contenant.

On applique le théorème 1.2 à la courbe C . Soit $f : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ une fonction de Belyï de degré d , non ramifiée en dehors de $0, 1$ et l'infini, et telle que $f(\{P_1, \dots, P_t\}) \subset \{0, 1, \infty\}$. On note $X_f = C \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ la courbe affine obtenue à partir de C en lui enlevant les points de ramification de la fonction f et $Y = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. D'après le lemme 2.4, il existe un ensemble fini S_0 de places de K et des modèles \mathcal{X} et \mathcal{Y} de C et, respectivement de \mathbf{P}^1 au-dessus de $\text{Spec}(O_{K,S_0})$ tels que, si on note $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ et $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus \{0, 1, \infty\}$, alors $\tilde{f} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$ est un revêtement étale de degré d .

Soient a, b et c des nombres algébriques non nuls appartenant à K tels que $a + b = c$. On pose

$$S_1 = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(a/c) < 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(a/c) > 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(b/c) > 0\},$$

de façon à ce que $\sum_{\mathfrak{p} \in S_1} \log N(\mathfrak{p}) = \text{rad}_K(a : b : c)$.

Plongeons $Y = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans \mathbf{A}^3 à l'aide des fonctions $x = T, y = \frac{1}{T}$ et $z = \frac{1}{1-T}$. Le point $y = (\frac{a}{c} : 1)$ de la courbe Y a pour coordonnées affines $(\frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b})$. Comme les nombres $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ et $\frac{c}{a}$ sont des S_1 -unités, y est un point S_1 -entier de Y .

Soit x dans $X_f(\overline{\mathbf{Q}})$ un antécédent par f de y . D'après le lemme 2.5 appliqué à $\tilde{f} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$, le corps de définition $L = K(x)$ du point x est une extension finie de K de degré $[L : K] \leq \deg(f) = d$, non ramifiée en dehors de l'ensemble $S = S_0 \cup S_1$, et, de plus, le point x se prolonge en une section σ_x au-dessus de $O_{L,S'}$ où $S' = \{\mathfrak{q} \in M_L / \exists \mathfrak{p} \in S, \mathfrak{q} | \mathfrak{p}\}$.

Appliquons l'hypothèse 1.3 à la courbe U définie sur K , à $\delta = d$, à l'extension de corps de nombres L/K de degré $[L : K] \leq \delta$, à la fonction hauteur $h_{U,L} = h_{f,L} = \frac{1}{\deg(f)}(h_L \circ f)$ relative à la fonction de Belyï f et au corps L , à l'ensemble de places $S' \subset M_L$ et au point x de $X_f \subset U$ qui relève y . On a

$$h_{f,L}(x) \leq k_1 \sum_{\mathfrak{q} \in S'} \log N_{L/\mathbf{Q}}(\mathfrak{q}) + k_2 \log D_L + k_3, \quad (10)$$

où les constantes $k_i(U, h_f, d)_{i \in \{1,2,3\}}$ ne dépendent pas du point x ni de a, b et c .

Regardons les éléments qui apparaissent dans cette inégalité.

D'après l'égalité (5), et parce que $f(x) = (\frac{a}{c} : 1)$,

$$h_{f,L}(x) = \frac{1}{\deg(f)} h_L(f(x)) = \frac{[L : K]}{d} h_K(a : c).$$

D'après l'inégalité (6), $h_K(a : c) \geq h_K(a : b : c) - [K : \mathbf{Q}] \log 2$, et comme, $[L : K] \leq d$, alors

$$h_{f,L}(x) \geq \frac{[L : K]}{d} h_K(a : b : c) - [K : \mathbf{Q}] \log 2. \quad (11)$$

Grâce à la formule (2) on a

$$\Sigma_{S'} \leq [L : K] \Sigma_S. \quad (12)$$

Pour majorer la valeur absolue du discriminant D_L du corps L , par rapport à celle du corps de base K , quitte à élargir S_0 pour que $\text{card}(P(S)) \geq 3$, on applique le lemme 2.2 à l'extension L/K , qui d'après le lemme 2.5 a pour ensemble de ramification $R_{L/K} \subset S$. D'où

$$\log D_L \leq [L : K] \left(\log D_K + \Sigma_S + c_0 [K : \mathbf{Q}] \log [L : K] \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S} \right). \quad (13)$$

En remplaçant dans l'inégalité (10) les inégalités (11), (12) et (13), et en remarquant que

$$\Sigma_S = \sum_{\mathfrak{p} \in S_0 \cup S_1} \log N(\mathfrak{p}) \leq \sum_{\mathfrak{p} \in S_0} \log N(\mathfrak{p}) + \sum_{\mathfrak{p} \in S_1} \log N(\mathfrak{p}) = \text{rad}_K(a : b : c) + k_0,$$

où $k_0 = \Sigma_{S_0}$ ne dépend que de la courbe U et du choix de la fonction de Belyï, on obtient l'inégalité

$$h_K(a : b : c) \leq \gamma_1 \text{rad}_K(a : b : c) + \gamma_2 \frac{\text{rad}_K(a : b : c) + k_0}{\log(\text{rad}_K(a : b : c) + k_0)} + \gamma_3,$$

$$\text{où } \gamma_1 = (k_1 + k_2) d, \quad \gamma_2 = c_0 k_2 d \log d [K : \mathbf{Q}]$$

$$\text{et } \gamma_3 = d k_2 \log D_K + d ([K : \mathbf{Q}] \log 2 + k_0(k_1 + k_2) + k_3).$$

Les constantes $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 3}$ et k_0 dépendent de la courbe U et du corps de nombres K qui ont été fixés au début de la démonstration, mais pas du point $y = (\frac{a}{c} : 1)$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.4. \square

4 $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, équation aux S -unités et conjecture abc .

Dans le cas où notre courbe affine U est $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, la situation est beaucoup plus simple : on n'a pas besoin de toute la force de la conjecture abc pour borner la hauteur des points S -entiers de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$; ni d'une hypothèse de type "*Siegel uniforme*" sur la courbe qui fasse intervenir une extension de corps, pour aboutir à la conjecture abc .

Théorème 4.1. *Soient K un corps de nombres et ϕ une fonction positive croissante définie sur \mathbf{R}_+ et dépendant éventuellement de K . On considère les assertions suivantes :*

i) pour tout triplet (a, b, c) de nombres algébriques appartenant au corps de nombres K , non nuls et tels que $a + b = c$, on a

$$h_K(a : b : c) \leq \phi(\text{rad}_K(a : b : c)) + \omega [K : \mathbf{Q}] \log 2;$$

ii) pour tout ensemble fini S de places de K et tout couple (u, v) de S -unités vérifiant l'équation $u + v = 1$, on a

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq \phi(\Sigma_S).$$

L'assertion i) avec $\omega = 0$ implique l'assertion ii).

L'assertion ii) implique l'assertion i) avec $\omega = 1$.

La conjecture 1.1 est obtenue à partir de l'assertion i) en prenant $\phi(x) = (1 + \varepsilon)x + c_{\varepsilon, K}$.

Théorème 4.2. *Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K et $B_{K, S}$ un nombre réel positif. En plongeant $U = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans l'espace affine \mathbf{A}^3 , on peut choisir la hauteur $h_{U, K}$ de façon à avoir une équivalence entre :*

i) tout couple (u, v) de S -unités tel que $u + v = 1$, vérifie

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq B_{K, S}; \text{ et}$$

ii) tout point S -entier P de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ vérifie

$$h_{U, K}(P) \leq B_{K, S}.$$

L'assertion ii) ci-dessus avec $B_{K, S} = c_1 \Sigma_S + c_2$ est le cas particulier de l'hypothèse 1.3, lorsque $U = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et $\delta = 1$.

Si l'on considère des points entiers sur \mathbf{Z} , i.e. $K = \mathbf{Q}$ et $S = M_K^\infty$, les théorèmes 4.1 et 4.2 sont vides car l'ensemble $U(\mathbf{Z})$ est lui-même vide, ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation $u + v = 1$. Le problème n'est intéressant que si l'on fait varier S .

Démonstration du théorème 4.1.

On fixe K et ϕ vérifiant les hypothèses du théorème.

L'assertion i) implique l'assertion ii).

Soient S un ensemble fini de places de K et u, v des S -unités de K vérifiant l'équation $u + v = 1$. On pose $u = \frac{a}{c}$ et $v = \frac{b}{c}$ avec a, b et c des éléments non nuls de K . Alors

$$u + v = 1 \Leftrightarrow a + b = c.$$

On a $h_K(a : b : c) = h_K(u : v : 1) \geq \max\{h_K(u), h_K(v)\}$ et, d'après l'égalité (7),

$$\text{rad}_K(a : b : c) = \text{rad}_K(u : 1 - u : 1) = \sum_{\mathfrak{p} \in H_u} \log N(\mathfrak{p}),$$

où $H_u = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(u) < 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(u) > 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(1-u) > 0\}$.

Comme u et $1-u$ sont des S -unités, si la valuation $v_{\mathfrak{p}}$ n'appartient pas à S , alors $v_{\mathfrak{p}}(u)$ et $v_{\mathfrak{p}}(1-u)$ sont nulles, et donc la valuation $v_{\mathfrak{p}}$ n'appartient pas à H_u , c'est-à-dire que $(v_{\mathfrak{p}} \in H_u \Rightarrow v_{\mathfrak{p}} \in S)$ i.e. $H_u \subset S$. On en déduit que

$$\text{rad}_K(a : b : c) \leq \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) = \Sigma_S.$$

Par hypothèse, $h_K(a : b : c) \leq \phi(\text{rad}_K(a : b : c))$ et comme la fonction ϕ est croissante,

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq \phi(\Sigma_S).$$

□

L'assertion ii) implique l'assertion i).

Soient a, b et c des nombres algébriques appartenant à K , non nuls et vérifiant $a + b = c$. On pose $S = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(a/c) \neq 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(b/c) > 0\}$. Alors

$$u = \frac{a}{c} \text{ et } v = \frac{b}{c}$$

sont des S -unités qui vérifient l'équation $u + v = 1$. On leur applique l'assertion ii). Comme $a + b = c$, d'après l'inégalité (6), et parce que $h_K(a : c) = h_K(u)$, on a $h_K(a : b : c) \leq \max\{h_K(u), h_K(v)\} + [K : \mathbf{Q}] \log 2$ et, d'après le (7),

$$\Sigma_S = \text{rad}_K(a : b : c).$$

On en déduit que $h_K(a : b : c) \leq \phi(\text{rad}_K(a : b : c)) + [K : \mathbf{Q}] \log 2$.

□

Démonstration du théorème 4.2.

On plonge $U = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans \mathbf{A}^3 à l'aide des fonctions $x = T, y = \frac{1}{T}$ et $z = \frac{1}{1-T}$. On pose aussi $t = 1 - x$. Les fonctions x et t prennent aux points S -entiers de U des valeurs dans $O_{K,S}$ et on a les relations

$$xy = 1, \quad zt = 1 \text{ et } x + t = 1,$$

ce qui veut dire que x et t sont des S -unités de somme 1.

Ainsi, à un point P de $U(O_{K,S})$ on associe, en posant $u = x(P)$ et $v = t(P)$, un couple (u, v) de S -unités vérifiant $u + v = 1$, auxquelles nous pouvons appliquer l'assertion i).

Réciproquement, à un couple (u, v) de S -unités vérifiant l'équation $u + v = 1$, on fait correspondre le point S -entier P de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ tel que $x(P) = u$, auquel nous appliquons l'assertion ii). Par symétrie, nous pouvons supposer que $h_K(v) \leq h_K(u)$.

En choisissant $h_{U,K} = h_K \circ x$, on a le résultat cherché dans les deux situations.

□

Remarque 4.3. On peut considérer une équation aux unités plus générale.

Soient A et B des éléments de K non nuls. Étant fixés le corps de nombres K et la fonction ϕ , l'assertion ii) du théorème 4.1 est équivalente à :

ii') *Pour tout ensemble fini S de places de K et tout couple (u, v) de S -unités vérifiant l'équation $Au + Bv = 1$, on a*

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq \phi(\Sigma_S + c_{AB}) + c'_{AB},$$

où $c_{AB} = \Sigma_{T_{AB}}$, $T_{AB} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(A) \neq 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(B) \neq 0\}$ et $c'_{AB} = h_K(A^{-1} : B^{-1} : 1)$.

Démonstration de la remarque 4.3.

Dans le sens réciproque c'est trivial, il suffit de prendre $A = B = 1$. On a alors $c_{AB} = c'_{AB} = 0$. Pour le sens direct, supposons vraie l'assertion ii). Soient $A, B \in K$ non nuls, S un ensemble fini de places de K et $u, v \in O_{K,S}^*$ vérifiant l'équation $Au + Bv = 1$. Posons $S' = S \cup T_{AB}$. Alors Au et Bv sont des S' -unités auxquelles on applique la borne de ii). Comme la fonction ϕ est croissante, on obtient

$$h_K(Au : Bv : 1) \leq \phi(\Sigma_{S'}) \leq \phi(\Sigma_S + \Sigma_{T_{AB}}).$$

On conclut en remarquant que $h_K(u : v : 1) \leq h_K(Au : Bv : 1) + h_K(A^{-1} : B^{-1} : 1)$. \square

5 Morphismes de réduction.

Depuis les travaux de C.L. Siegel, il est connu que la recherche de solutions (S -)entières sur certaines équations diophantiennes, peut se ramener à la résolution de l'équation $u + v = 1$ en (S -)unités. C'est ainsi que le résultat (effectif) de A. Baker sur l'équation aux unités (obtenu grâce à son célèbre théorème sur les formes linéaires de logarithmes) a été étendu à d'autres équations. Dans [20] §8.1, J.-P. Serre donne deux énoncés permettant de déduire la finitude des points entiers d'une courbe, à partir d'une autre, à l'aide de certains morphismes. Le principe de réduction est explicite de façon très géométrique et claire dans [20] et déjà présent implicitement dans [13]. Pour le premier énoncé, on demande que le morphisme soit fini, et pour le second, qu'il soit un revêtement étale. Ces deux résultats sont ici rendus "effectifs" au sens où l'on borne la hauteur des points S -entiers en fonction de S , ainsi que du corps de rationalité de la courbe. Nous avons choisi d'exprimer la dépendance en l'ensemble S avec $\Sigma_S = \sum_{v \in S} \log N(v)$, mais aussi avec son cardinal et le maximum des caractéristiques résiduelles, $\max P(S)$, qui apparaissent souvent dans la littérature. (On peut comparer ces quantités entre elles à l'aide des inégalités de la section 2.)

Étant fixés un corps de nombres K , une courbe affine U définie sur K , une fonction hauteur h_U définie sur U , et un entier naturel $n \geq 1$, on considère la propriété "effective" de finitude suivante.

Propriété 5.1. ($\mathbf{P}_{U,K,n}$)

Il existe une fonction positive B_U en cinq variables, croissante en chaque variable, telle que, pour toute extension L/K de degré $[L : K] \leq n$, tout ensemble fini T de places de L et tout point x de $U(O_{L,T})$, on ait

$$h_U(x) \leq B_U(\Sigma_T, \text{card}(T), \max P(T), \log D_L, [L : \mathbf{Q}]).$$

Cette propriété ne dépend pas de la fonction hauteur choisie (cf. l'inégalité (8)). En revanche, la fonction B_U en dépend.

Proposition 5.2. Soient $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme fini de courbes algébriques affines défini sur un corps de nombres K et h_X et h_Y des hauteurs sur X et Y . Supposons que la courbe Y vérifie la propriété ($\mathbf{P}_{Y,K,n}$) pour $n = 1$ et une fonction B_Y .

Alors la courbe X vérifie la propriété ($\mathbf{P}_{X,K,n}$) pour $n = 1$ et une fonction B_X . De plus, on peut choisir la fonction B_X vérifiant :

il existe des réels u_ϕ, v_ϕ et w_ϕ ne dépendant que de $\phi : X \rightarrow Y$, et $\gamma > 0$, tels que

$$B_X(u, v, w, z, d) = \gamma B_Y(u + u_\phi, v + v_\phi, w + w_\phi, z, d).$$

Proposition 5.3. Soit $\phi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de courbes algébriques affines de degré d_ϕ , défini sur un corps de nombres K . Supposons ϕ fini, surjectif et non ramifié. Soient h_X et h_Y des fonctions hauteurs sur X et Y , respectivement. Soit $n \geq d_\phi$ et supposons que la courbe X vérifie la propriété $(\mathbf{P}_{X,K,n})$ pour une fonction B_X .

Alors la courbe Y vérifie la propriété $(\mathbf{P}_{Y,K,\delta})$ pour $\delta = \frac{n}{d_\phi}$ et une fonction B_Y . De plus, on peut choisir la fonction B_Y vérifiant :

il existe des réels u_ϕ, v_ϕ et w_ϕ ne dépendant que de $\phi : X \longrightarrow Y$, et $\gamma > 0$, tels que

$$B_Y(u, v, w, z, d) = \gamma B_X(d_\phi(u + u_\phi), d_\phi(v + v_\phi), w + w_\phi, \gamma d, d_\phi d),$$

où $\gamma d = d_\phi(z + u + u_\phi + c_0 d \log(d_\phi \frac{u+u_\phi}{\log(u+u_\phi)}))$ et c_0 est la constante absolue du lemme 2.1.

Sous les hypothèses de la proposition 5.3, si Y vérifie $(\mathbf{P}_{Y,K,n})$, alors X vérifie $(\mathbf{P}_{X,K,n})$.

Remarque 5.4. Dans les propositions 5.2 et 5.3, on peut choisir $u_\phi = \Sigma_{S_\phi}, v_\phi = \text{card}(S_\phi)$ et $w_\phi = \max P(S_\phi)$, où S_ϕ est l'ensemble fini des places en lesquelles les courbes X ou Y ou le morphisme ϕ ont "mauvaise réduction". Le nombre γ dépend du morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$, ainsi que des choix des hauteurs h_X et h_Y .

Remarque 5.5. Notons toutefois que nous ne pouvons pas appliquer la proposition 5.2 à la fonction de Belyï associée à une courbe U pour borner la hauteur de ses points S -entiers à partir des bornes inconditionnelles connues pour la hauteur des points S -entiers de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. En effet, le théorème de Belyï nous permet d'appliquer la proposition 5.2 à l'ouvert $X = X_f$, et non pas à U , car il nous donne l'inclusion $f(U_\infty) \subset \{0, 1, \infty\}$, mais pas l'égalité.

Démonstration de la proposition 5.2.

Soient h_X et h_Y deux fonctions hauteurs définies respectivement sur la courbe X et la courbe Y , associées à des diviseurs de degré 1. Alors la fonction $\frac{1}{\deg(\phi)} h_Y \circ \phi$ est une hauteur sur X associée à un diviseur de degré 1. D'après la théorie des hauteurs (cf. l'inégalité (8)), pour tout point rationnel x de X , on a

$$h_X(x) \leq \frac{1}{\deg(\phi)} h_Y(\phi(x)) + O(\sqrt{h_Y(\phi(x))}),$$

où la constante implicite ne dépend que des courbes X et Y , des hauteurs h_X et h_Y et du morphisme ϕ .

Si S est un ensemble fini de places du corps K et si le point x est S -entier, alors $\phi(x)$ est un point S' -entier de la courbe Y , où $S' = S \cup S_\phi$ pour un ensemble fini S_ϕ ne dépendant que du morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$. En remarquant d'une part que $\Sigma_{S'} \leq \Sigma_S + \Sigma_{S_\phi}$, que $\text{card}(S') \leq \text{card}(S) + \text{card}(S_\phi)$ et que $\max P(S') \leq \max P(S) + \max P(S_\phi)$, et d'autre part que la fonction B_Y est positive et croissante, on obtient

$$h_Y(\phi(x)) \leq B_Y(\Sigma_S + \Sigma_{S_\phi}, \text{card}(S) + \text{card}(S_\phi), \max P(S) + \max P(S_\phi), \log D_K, [K : \mathbf{Q}]);$$

ce qui nous permet de conclure. □

Démonstration de la proposition 5.3.

Soit L/K une extension de corps de degré $[L : K] \leq \frac{n}{d_\phi}$.

Notons \overline{X} (respectivement \overline{Y}) la complétée de X (resp. de Y) et $X_\infty = \overline{X} \setminus X$ (resp. Y_∞) les points “à l’infini”. Le morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ s’étend en un morphisme (toujours noté ϕ) de \overline{X} vers \overline{Y} . Comme il est fini, $\phi^{-1}(Y_\infty) = X_\infty$. D’après le lemme 2.4, il existe un ensemble fini S_ϕ de places de L en dehors duquel ϕ s’étend en un revêtement étale $\tilde{\phi} : \mathcal{X} \setminus \overline{X_\infty} \rightarrow \mathcal{Y} \setminus \overline{Y_\infty}$.

Soient S un ensemble fini de places de L et y un point S -entier de Y . Comme le morphisme ϕ est surjectif, on peut relever le point y en un point x de $X(\overline{\mathbf{Q}})$.

D’après le lemme 2.5, le corps de rationalité $M = L(x)$ de x est une extension finie, de degré $[M : L] \leq d_\phi$ et non ramifiée en dehors de l’ensemble $S \cup S_\phi$. De plus, le point x est S' -entier, où S' est l’ensemble de places de M au-dessus de celles de $S \cup S_\phi$.

Soit h_X une fonction hauteur définie sur la courbe X . Comme $[M : K] \leq d_\phi \frac{n}{d_\phi} = n$, appliquons l’hypothèse à la fonction hauteur h_X , à l’extension M de K , à l’ensemble de places S' et au point x qui relève y . On a

$$h_X(x) \leq B_X(\Sigma_{S'}, \text{card}(S'), \max P(S'), \log D_M, [M : \mathbf{Q}]).$$

En appliquant l’inégalité (2), on a $\Sigma_{S'} \leq [M : L] \Sigma_{S \cup S_\phi} \leq d_\phi (\Sigma_S + \Sigma_{S_\phi})$. De plus, $\text{card}(S') \leq [M : L] \text{card}(S \cup S_\phi) \leq d_\phi (\text{card}(S) + \text{card}(S_\phi))$ et $\max P(S') = \max P(S \cup S_\phi) \leq \max P(S) + \max P(S_\phi)$. Grâce au lemme 2.2, on majore la valeur absolue du discriminant de l’extension M en fonction de celle du corps de base L . On a $\log D_M \leq \gamma_L$, où

$$\gamma_L = d_\phi \left(\log D_L + \Sigma_S + \Sigma_{S_\phi} + c_0 [L : \mathbf{Q}] \log(d_\phi) \frac{\Sigma_S + \Sigma_{S_\phi}}{\log(\Sigma_S + \Sigma_{S_\phi})} \right)$$

et c_0 est la constante du lemme 2.1. D’où

$$h_X(x) \leq B_X(d_\phi (\Sigma_S + \Sigma_{S_\phi}), d_\phi (\text{card}(S) + \text{card}(S_\phi)), \max P(S) + \max P(S_\phi), \gamma_L, d_\phi [L : \mathbf{Q}]).$$

Par ailleurs, si h_Y est une fonction hauteur définie sur la courbe Y et associée à un diviseur de degré 1, alors $\frac{1}{d_\phi}(h_Y \circ \phi)$ est une fonction hauteur définie sur la courbe X associée à un diviseur de degré 1 et on a (cf. l’inégalité (8))

$$h_Y(y) \leq d_\phi h_X(x) + O(\sqrt{h_X(x)}),$$

où la constante implicite ne dépend que de X, Y, h_X, h_Y et ϕ , et on peut conclure. \square

Corollaire 5.6. *Les théorèmes 4.1 et 4.2 impliquent le théorème 1.4.*

Démonstration du corollaire 5.6.

L’hypothèse 1.3 peut être vue comme la collection des propriétés $(\mathbf{P}_{\mathbf{U}, \mathbf{K}, \delta})$ pour tout $\delta \geq 1$, avec la fonction $B_U(u, v, w, z, d) = k_1 u + k_2 z + k_3$.

D’après les théorèmes 4.1 et 4.2, qui montrent ensemble qu’un énoncé du type “*Siegel Uniforme*” pour $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ impliquerait la conjecture *abc*, le théorème 1.4 peut être obtenu en appliquant la proposition 5.3 à une fonction de Belyı̆ f associée à la courbe U . Si la courbe U est définie sur un corps K , en prenant $\delta = \deg(f)$, on obtient un énoncé allant dans le sens de la conjecture *abc* valable sur K . (Cf. le théorème 1.5.) \square

6 Applications.

Commençons par énoncer le théorème de Y. Bugeaud et K. Györy [5] (concernant l'équation aux unités) et le théorème de Yu. Bilu [2] (version effective du théorème de Siegel pour les revêtements galoisiens de la droite projective), qui nous permettent d'obtenir un résultat inconditionnel : le théorème 1.5.

Théorème 6.1. (Bugeaud-Györy) *Soient K un corps de nombres, H un nombre réel $\geq e$, A et B des éléments non nuls de K tels que $\max\{h(A), h(B)\} \leq \log H$ et T un ensemble fini de places de K contenant les places archimédiennes. Les solutions u, v de l'équation $Au + Bv = 1$ appartenant à $O_{K,T}^*$ vérifient*

$$\max\{h(u), h(v)\} \leq \gamma P^{[K:\mathbf{Q}]} R_T (\log^+ R_T) (\log^+(PR_T) / \log^+ P) \log H,$$

où γ est un nombre réel dépendant de $[K : \mathbf{Q}]$ et de $\text{card}(T)$, P est le maximum des caractéristiques résiduelles de T , R_T est le T -régulateur et $\log^+(\cdot)$ est une notation pour $\max\{\log \cdot, 1\}$.

Précisément, $\gamma = c_K^{\text{card}(T)+1} (\text{card}(T))^{5\text{card}(T)+10}$, où $c_K \geq 1$ ne dépend que de $[K : \mathbf{Q}]$.

Théorème 6.2. (Bilu) *Soient K un corps de nombres, C une courbe algébrique projective de genre $g \geq 1$, définie sur K et $x \in K(C)$ une fonction non constante telle que $x : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ soit un revêtement galoisien (i.e. $\overline{\mathbf{Q}}(C)/\overline{\mathbf{Q}}(x)$ et une extension galoisienne). Pour tout ensemble fini S de places de K contenant les places archimédiennes, on pose*

$$C(x, K, S) = \{P \in C(K) / x(P) \in O_{K,S}\}.$$

Soient $y \in K(C)$ telle que $K(C) = K(x, y)$ et $f(X, Y) \in K[X, Y]$ un polynôme séparable non nul tel que $f(x, y) = 0$. On pose $m = \deg_X(f)$ et $n = \deg_Y(f)$. Pour tout P de $C(x, K, S)$ on a

$$h(x(P)) \leq P^{N_1 [K:\mathbf{Q}]} \left(D_K \prod_{\mathfrak{p} \in S} N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}) \right)^{N_2} e^\psi,$$

où $\psi = 100 \text{card}(S) N_2 (\log(N \text{card}(S)) + O(1)) + [K : \mathbf{Q}] N_3 (h(g) + O(N))$, $N = \max\{m, n, 3\}$, $N_1 = \max\{n^5, 16n^2m^2, 256m^3\}$, $N_2 = \max\{n^4, 10m^2n\}$ et $N_3 = \max\{mn^7, 500m^2n^4\}$, $h(g)$ désigne la hauteur du polynôme g , à savoir, la hauteur du point de l'espace projectif défini par les coefficients de g , et P est le maximum des caractéristiques résiduelles de l'ensemble S .

L'inégalité du théorème 1.5 est du même ordre (exponentiel) que celle des résultats précédents de Stewart-Tijdeman [23] et Stewart-Yu [24], et les constantes sont de qualité inférieure ; elle a néanmoins l'avantage d'être valable pour tout corps de nombres.

Théorème 6.3. (Stewart-Yu) *Il existe une constante $\eta > 0$ effectivement calculable telle que, pour tout triplet (a, b, c) d'entiers naturels positifs, premiers entre eux et vérifiant $a + b = c$, on ait*

$$h(a : b : c) < \eta \text{rad}_{\mathbf{Q}}(a : b : c)^3 \exp\left(\frac{1}{3} \text{rad}_{\mathbf{Q}}(a : b : c)\right).$$

Le théorème 6.3 correspond à l'assertion i) du théorème 4.1 où le corps de nombres est \mathbf{Q} , la fonction ϕ est définie par $\phi(x) = \eta x^3 \exp(\frac{1}{3}x)$ et $\omega = 0$.

6.1 Vers *abc*.

Pour obtenir le théorème 1.5, on majore les termes de la borne du théorème 6.1 faisant intervenir l'ensemble T , à savoir P , R_T et $\text{card}(T)$, en fonction de D_K et de Σ_T , et on applique le théorème 4.1 à la fonction ϕ de Σ_T ainsi obtenue.

Démonstration du théorème 1.5.

Soit T un ensemble fini de places du corps K et u et v des T -unités vérifiant l'équation $u + v = 1$, auxquelles on applique le théorème 6.1. On désigne par c_i des nombres réels ne dépendant que du degré $[K : \mathbf{Q}]$ et on pose $S = T \cap \mathcal{P}_K$.

La remarque 1 de [5] nous donne $\frac{\log^+(PR_T)}{\log^+ P} \leq 2 \log^+ R_T$. Quitte à élargir S (ce qui modifie légèrement les nombres c_i ne dépendant ni de S ni de D_K), nous pouvons supposer que $\text{card}(P(S)) \geq 3$ et $\Sigma_S \geq e$. Alors $\log^+ R_T = \log R_T$ et $R_T \log^+ R_T \frac{\log^+(PR_T)}{\log^+ P} \leq 2R_T^2$. En appliquant successivement le lemme 3 de [5] et le lemme 8 de [4], on obtient

$$R_T \leq R_K \mathfrak{h}_K \prod_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) \leq c_1 \sqrt{D_K} (\log D_K)^{[K:\mathbf{Q}]-1} \prod_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}),$$

où \mathfrak{h}_K désigne le nombre de classes. On a alors

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq c_2 \gamma_{(T, [K:\mathbf{Q}])} P^{[K:\mathbf{Q}]} D_K (\log D_K)^{2[K:\mathbf{Q}]-2} \left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) \right)^2. \quad (14)$$

D'après l'inégalité (3) nous avons $P^{[K:\mathbf{Q}]} \leq \exp\{[K : \mathbf{Q}] \Sigma_S\}$. En appliquant l'inégalité (4) et le lemme 2.1 on obtient $\text{card}(S) \leq c_0 [K : \mathbf{Q}] \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S}$ et comme $\text{card}(T) \leq \text{card}(S) + [K : \mathbf{Q}]$, alors $\gamma \leq \exp\{c_3 \Sigma_S\}$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) \leq (\Sigma_S)^{\text{card}(S)}$. D'où l'existence de réels γ_1 et γ_3 effectivement calculables et ne dépendant que de $[K : \mathbf{Q}]$, tels que

$$\max\{h_K(u), h_K(v)\} \leq \exp\{\gamma_1 \Sigma_S + \log D_K + (2[K : \mathbf{Q}] - 2) \log \log D_K + \gamma_3\}.$$

On conclut en appliquant le théorème 4.1 à la fonction $\phi(x) = \exp\{\gamma_1 x + \gamma_2 \log D_K + \gamma_3\}$, avec $\gamma_2 = 2[K : \mathbf{Q}] - 1$. \square

Remarque 6.4. *Bien que la borne de l'hypothèse 1.3 soit plus forte que celle du théorème 6.2, nous pouvons déduire de ce dernier, en reprenant la démonstration du théorème 1.4, le théorème 1.5. Nous obtenons ainsi une constante absolue γ_2 , indépendante du degré $[K : \mathbf{Q}]$.*

Démonstration de la remarque 6.4.

Soient K un corps de nombres et a, b et c des éléments non nuls de K tels que $a + b = c$. Posons $S_1 = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_K / v_{\mathfrak{p}}(\frac{a}{c}) \neq 0 \text{ ou } v_{\mathfrak{p}}(\frac{b}{c}) > 0\}$, de façon à ce que $\Sigma_{S_1} = \text{rad}_K(a : b : c)$ et que $(a : c) \in (\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})(O_{K, S_1})$.

Soient U la courbe d'équation affine $y^2 = x^3 - x$ et C la courbe projective correspondant à l'équation homogène $Y^2 Z = X^3 - X Z^2$. Notons $P_{\infty} = (0 : 1 : 0)$ le point à l'infini.

Soit f une fonction de Belyı́ associée à la courbe C telle que $f(P_{\infty}) \in \{0, 1, \infty\}$. Posons $d = \deg(f)$. Soit p un point de $C \setminus f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \subset U$ qui relève le point S -entier $(a : c)$.

D'après les lemmes 2.4 et 2.5, il existe un ensemble fini S_0 d'idéaux premiers de K , tel que le corps de rationalité $L = K(p)$ du point p soit une extension finie de degré $[L : K] \leq d$, non ramifiée en dehors de l'ensemble $S = S_0 \cup S_1$ et le point p soit S' -entier, où S' désigne l'ensemble de places de L qui sont au-dessus de celles de S .

Quitte à élargir l'ensemble S_0 , supposons que $\text{card}(P(S)) \geq 3$.

Au lieu de l'hypothèse "Siegel Uniforme" (U, K) , appliquons ici le théorème 6.2 à la courbe C , au corps L , à la fonction rationnelle x et au point S' -entier p . (Avec nos notations, l'ensemble $U(O_{L,S'})$ des points S' -entiers de U est $\{(x, y) \in (O_{L,S'})^2 / y^2 = x^3 - x\}$ et cet ensemble est inclus dans celui considéré par Yu. Bilu, $C(x, L, S')$. De plus, la hauteur du polynôme définissant notre courbe est nulle.) Ainsi

$$h_x(p) \leq \exp \{N_2(\Sigma_{S'} + \log D_L) + N_1[L : \mathbf{Q}] \log P + \psi\},$$

où $\psi = 400 N_2 \text{card}(S') (\log(\text{card}(S')) + N_4) + [L : \mathbf{Q}] N_3$, P est le maximum des caractéristiques résiduelles de l'ensemble S' et N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des constantes absolues, effectivement calculables.

Ramenons-nous au corps K et à l'ensemble S .

Comme $[L : K] \leq d$, d'après l'inégalité (2) on a $\Sigma_{S'} \leq d \Sigma_S$, et d'après le lemme 2.2,

$$\log D_L \leq d \left(\log D_K + \Sigma_S + c_0 [K : \mathbf{Q}] \log d \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S} \right).$$

Par ailleurs, l'inégalité (3) nous majore le maximum P des caractéristiques résiduelles de S' (ou de S) : $\log P \leq \Sigma_S$. L'inégalité (4), ainsi que le lemme 2.1, appliqués à l'ensemble S' , nous permettent de majorer le cardinal de S' : $\text{card}(S') \leq c_0 d [K : \mathbf{Q}] \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S}$, ce qui nous permet de majorer ψ . On a

$$h_x(p) \leq \exp \left\{ n_1 \Sigma_S + n_2 \frac{\Sigma_S}{\log \Sigma_S} + n_3 d \log D_K + n_4 \right\},$$

où n_1, n_2 et n_4 sont des polynômes en $d, \log d$ et $[K : \mathbf{Q}]$ de degré inférieur ou égal à 1 en chacune des variables.

Ramenons-nous maintenant à la hauteur et au radical de $(a : b : c)$.

Remarquons que $\Sigma_S \leq \Sigma_{S_1} + \Sigma_{S_0} = \text{rad}_K(a : b : c) + \Sigma_{S_0}$ et que S_0 ne dépend que de la courbe U et de la fonction de Belyï choisies au début.

De plus, on a $h_f(p) = \frac{h(f(p))}{d} = \frac{h(a:c)}{d} = \frac{h_K(a:c)}{d[K:\mathbf{Q}]}$ et, d'après l'inégalité (6),

$$h_f(p) \geq \frac{h_K(a : b : c)}{d[K : \mathbf{Q}]} - \frac{\log 2}{d}.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité (8), $h_f(p) \leq h_x(p) + n_5 \sqrt{h_x(p)}$, avec n_5 dépendant des fonctions x et f et de la courbe U , donc

$$h_K(a : b : c) \leq d [K : \mathbf{Q}] \left(h_x(p) + n_5 \sqrt{h_x(p)} \right) + [K : \mathbf{Q}] \log 2.$$

On obtient

$$h_K(a : b : c) \leq \exp \{ \gamma_1 \text{rad}_K(a : b : c) + \gamma_2 \log D_K + \gamma_3 \},$$

où le nombre réel γ_1 dépend de d et de $[K : \mathbf{Q}]$, $\gamma_2 = n_6 d$ avec n_6 une constante absolue et γ_3 dépend de x, f, U, d et $[K : \mathbf{Q}]$. Ceci achève la démonstration. \square

Au lieu de la courbe d'équation $y^2 = x^3 - x$, on aurait pu prendre n'importe quel revêtement galoisien de la droite projective.

6.2 Courbes de genre nul.

Dans ce paragraphe, K est un corps de nombres, T un ensemble fini de places de K contenant les places archimédiennes, P est le maximum des caractéristiques résiduelles de T , et on pose $S = T \cap \mathcal{P}_K$, $d = [K : \mathbf{Q}]$, $t = \text{card}(T)$ et $s = \text{card}(S)$.

Corollaire 6.5. *Tout point T -entier x de $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ vérifie :*

$$h_K(x) \leq c_d^t t^{5(t+2)} P^d (\log P)^{2s} D_K (\log D_K)^{2d-2},$$

où le nombre c_d ne dépend que du degré d .

Démonstration du corollaire 6.5.

On applique le théorème 4.2 à la borne (14), obtenue pour la hauteur des solutions en T -unités de l'équation $u + v = 1$ grâce au théorème 6.1. Puis on remarque que $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \log N(\mathfrak{p}) \leq \prod_{\mathfrak{p} \in S} f_{\mathfrak{p}} \log P \leq (\log P)^s \prod_{p \in P(S)} (\sum_{\mathfrak{p}|p} f_{\mathfrak{p}})^{\text{card}\{\mathfrak{p}|p\}} \leq (\log P)^s d^{\text{card}(P(S))} \leq (d^d \log P)^s$. \square

Remarque 6.6. *Si U est une courbe de genre nul ayant au moins trois points à l'infini, on peut appliquer la proposition 5.2 au morphisme $\phi : U \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ qui identifie C à \mathbf{P}^1 et envoie U_{∞} sur $\{0, 1, \infty\}$, et à la borne obtenue pour $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans le corollaire 6.5, pour obtenir, pour tout point x de $U(O_{K,T})$,*

$$h_{U,K}(x) \leq c_{d,\phi}^t t^{5t+c_{1,\phi}} P^d (\log P)^{2s+c_{2,\phi}} D_K (\log D_K)^{2d-2}, \quad (15)$$

où $c_{1,\phi}$ et $c_{2,\phi}$ ne dépendent que de ϕ et $c_{d,\phi}$ dépend en plus, de d .

à ce sujet, et contrairement à ce qui a été démontré ici, D. Poulakis obtient des résultats explicites. Soit $F \in K[X, Y]$ un polynôme absolument irréductible définissant une courbe de genre nul ayant au moins trois points à l'infini. Notons N son degré et $H_K(F)$ son hauteur multiplicative. Soient x et y des T -entiers vérifiant $F(x, y) = 0$. Dans [19], il montre que

$$\max\{h_K(x), h_K(y)\} \leq \gamma_{d,N,t} H_K(F)^{6000 N^{3N+10} d^2 t} \mathcal{P}^{300 N^{3N+4} dt} D_K^{65 N^{3N+4} dt},$$

où $\mathcal{P} = \max_{\mathfrak{p} \in S} N(\mathfrak{p})$ et $\gamma = N^{10^6 N^{5N+10} d^2 t^3}$. On a $P \leq \mathcal{P} \leq P^d$.

La borne (15) donne une meilleure dépendance en le discriminant D_K ; en particulier, l'exposant de D_K ne dépend pas en l'ensemble S . Elle donne aussi une meilleure dépendance en l'ensemble de places S quand son cardinal est petit par rapport à P .

Dans le cas particulier où $T = M_K^{\infty}$, D. Poulakis [18] obtient :

$$\max\{h_K(x), h_K(y)\} \leq \xi_{d,N} D_K^{4730 N^9} H_K(F)^{10^9 N^{35}},$$

où $\xi_{d,N} = d^{17d N^3} (9N^{5N+4})^{10^9} d N^{35}$. On remarque ici en particulier que l'exposant de D_K ne dépend pas du degré d .

6.3 Quelques équations diophantiennes.

Définition 6.7. *On dira qu'une courbe algébrique U est contrôlée par une autre courbe V du point de vue des points entiers, si la finitude des points (S -)entiers de U peut être déduite de celle des points (S -)entiers de V à l'aide de morphismes comme ceux des propositions 5.2 ou 5.3.*

En particulier, U est contrôlée par $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ s'il existe $m \geq 1$ et un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & U_1 & & U_2 & & U_m \\
 & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \cdots & \searrow \\
 U = V_0 & & & & V_1 & & V_{m-1} & & & & V_m = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \\
 & \swarrow & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \searrow & \\
 & \psi_1 & \phi_1 & & \psi_2 & & \psi_m & & \phi_m & &
 \end{array}$$

avec, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, le morphisme ϕ_i fini et le morphisme ψ_i fini, surjectif et non ramifié en dehors des "points à l'infini" de V_{i-1} .

Voici quelques exemples de courbes contrôlées par $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$: les courbes données par une équation de Thue, les elliptiques, les superelliptiques et les courbes hyperelliptiques ayant un point de Weierstrass à l'infini.

Corollaire 6.8. *Soit U une courbe affine définie sur un corps de nombres K de degré $d = [K : \mathbf{Q}]$ telle que $\chi(U) < 0$ et h_U une hauteur sur U . Supposons que U est contrôlée par $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ au sens de la définition 6.7. Soit S un ensemble fini de places de K et P le maximum de ses caractéristiques résiduelles. Pour tout point S -entier x de U , on a*

$$h_U(x) \leq k_d^{\text{card}(S)} \text{card}(S)^{k_1} \text{card}(S)^{\text{card}(S)+k_2} P^{k_3 d} (\log P)^{k_4 \text{card}(S)+k_5} e^{\gamma_d} \gamma_d^{k_6 d-2},$$

où $\gamma_d = k_7 (\log D_K + \Sigma_S + k_8 + d k_9 \frac{\Sigma_S + k_{10}}{\log(\Sigma_S + k_{11})})$, les réels k_j dépendent de U et k_d dépend en plus de d .

Y. Bugeaud [4] donne une borne pour la hauteur des points S -entiers des courbes superelliptiques. Sa borne a l'avantage, par rapport à celle du corollaire 6.8, de rendre explicites les exposants qu'y apparaissent. L'ordre de grandeur des deux bornes est le même en ce qui concerne la dépendance en le discriminant du corps K , et aussi en l'ensemble de places S , si l'on fixe son cardinal. On pouvait prévoir cette ressemblance des bornes puisque les deux résultats sont déduits de [5].

Démonstration du corollaire 6.8.

Nous appliquons les propositions 5.2 et 5.3, respectivement aux morphismes ϕ_i et ψ_i qui lient U à $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (en suivant le chapitre 8.4 de [20], par exemple), et à la fonction $B_{\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}}(u, v, w, z, d) = c_d^v v^{5(v+2)} w^d (\log w)^{2v} e^z z^{2d-2}$ donnée par le corollaire 6.5. Si le morphisme $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est fini, d'après la proposition 5.2, la courbe X vérifie la propriété 5.1 pour la fonction $B_X(u, v, w, z, d) = c_{3,d}^v v^{5v+c_1} w^d (\log w)^{2v+c_2} e^z z^{2d-2}$, où c_1 et c_2 dépendent du morphisme ϕ et $c_{3,d}$ dépend en plus de d . Si $\psi : X \rightarrow Y$ est un revêtement étale, d'après la proposition 5.3, la courbe Y vérifie la propriété 5.1 pour la fonction $B_Y(u, v, w, z, d) = c_{4,d}^v v^{c_5 v+c_6} w^{c_7 d} (\log w)^{c_8 v+c_9} e^{\gamma_d} \gamma_d^{c_{10} d-2}$, où $\gamma_d = c_{11} (z + u + c_{12} + c_0 d \log(c_{11} \frac{u+c_{12}}{\log(u+c_{12})}))$, et les réels c_j dépendent de ψ et $c_{4,d}$ dépend en plus de d . On remarque que par des applications successives des propositions 5.2 et 5.3 on ne change pas l'ordre de grandeur de la borne de la hauteur des points entiers, même si les constantes k_j sont modifiées. \square

En particulier, dans le cas d'une courbe elliptique nous obtenons le résultat ci-dessous.

Corollaire 6.9. Soient E une courbe affine définie sur un corps de nombres K de degré d dont la complétée \overline{E} est une courbe elliptique, et h_E une hauteur définie sur la courbe E . Soit S un ensemble fini de places de K et P le maximum de ses caractéristiques résiduelles. Pour tout point S -entier p de E , on a

$$h_E(p) \leq \gamma_E c_d^{s+c_{1,E}} s^{20s+c_{2,E}} P^{4d} (\log P)^{8s+c_{3,E}} e^{\gamma_d} \gamma_d^{8d-2},$$

où $\gamma_d = 4(\log D_K + \Sigma_S + c_{4,E} + c_0 \log 4 d \frac{\Sigma_S + c_{5,E}}{\log(\Sigma_S + c_{5,E})})$, les nombres $c_{i,E}$ dépendent de E et γ_E dépend du choix des morphismes liant E à $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, ainsi que de celui de la hauteur.

Démonstration du corollaire 6.9. Supposons que la courbe E a un unique point “à l’infini” O qui est K -rationnel et prenons-le comme origine de sa loi de groupe. La multiplication par 2, notée ψ , est étale, de degré 4, donc l’image inverse de l’origine O consiste en quatre points : O, E_1, E_2, E_3 . Si notre courbe E est donnée par l’équation de Weierstrass $y^2 = f(x)$ où $f(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$, alors $E_i = (e_i : 1)$. En composant le morphisme donné par la x -coordonnée avec le morphisme qui envoie $(r : 1)$ sur $((r - e_1)(e_2 - e_3) : (e_2 - e_1)(r - e_3))$, nous obtenons un morphisme fini $\phi : E' = \overline{E} \setminus \{O, E_1, E_2, E_3\} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, de degré 2.

D’après le corollaire 6.5, $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ vérifie la propriété 5.1 pour la fonction

$$B_{\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}}(u, v, w, z, d) = c_d^v v^{5(v+2)} w^d (\log w)^{2v} e^z z^{2d-2}.$$

En appliquant la proposition 5.2 au morphisme ϕ , nous en déduisons que la courbe E' vérifie la propriété 5.1 pour la fonction

$$B_{E'}(u, v, w, z, d) = c_\phi c_d^{v+v_\phi} (v + v_\phi)^{5(v+v_\phi+2)} (w + w_\phi)^d (\log(w + w_\phi))^{2(v+v_\phi)} e^z z^{2d-2},$$

où c_ϕ ne dépend que de ϕ , c_d que de d , $v_\phi = \text{card}(S_\phi)$, $w_\phi = \max P(S_\phi)$ et S_ϕ est l’ensemble des idéaux premiers en lesquels ϕ ou E' ont “mauvaise réduction”.

En appliquant la proposition 5.3 au morphisme ψ , nous en déduisons que E vérifie la propriété de finitude 5.1 pour la fonction

$$B_E(u, v, w, z, d) = c_\psi c_\phi c_d^{4(v+v_\psi)+v_\phi} (4(v + v_\psi) + v_\phi)^{5(4(v+v_\psi)+v_\phi)+2} (w + w_\psi + w_\phi)^{4d} \times \\ \times (\log(w + w_\psi + w_\phi))^{2(4(v+v_\psi)+v_\phi)} e^{\gamma_d} \gamma_d^{8d-2},$$

où $\gamma_d = 4(z + u + u_\psi + c_0 \log 4 d \frac{u+u_\psi}{\log(u+u_\psi)})$, c_ψ ne dépend que de ψ , c_d que de d , $u_\psi = \Sigma_{S_\psi}$, $v_\psi = \text{card}(S_\psi)$, $w_\psi = \max P(S_\psi)$ et S_ψ est l’ensemble des idéaux premiers en lesquels ψ, E' ou E ont “mauvaise réduction”. Ceci démontre le résultat. \square

Posons $f(x) = x^3 + ax + b$, avec a et b dans $O_{K,S}$ et tels que $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Soient (x, y) dans $O_{K,S}^2$ et vérifiant $y^2 = f(x)$. Pour $K = \mathbf{Q}$, L. Hadju et T. Herendi [10] montrent que :

$$\max\{h(x), h(y)\} \leq (c_{1,f} s + c_{2,f}) 10^{38s+86} (s+1)^{20s+35} P^{24} (\log^+(P))^{4s+2},$$

où $c_{1,f}$ et $c_{2,f}$ ne dépendent que en le polynôme f .

Quand l’ensemble de places S est réduit à l’ensemble des places archimédiennes, on a le résultat de Y. Bugeaud [3] :

$$\max\{h(x), h(y)\} \leq c_{d,f} D_K^6 (\log D_K)^{12d+1},$$

où $c_{d,f}$ dépend uniquement en le degré d de K et en le polynôme f ; alors que le corollaire 6.9 donne une borne légèrement meilleure : $c_{E,d,S} D_K^4 (\log D_K)^{8d-2}$.

Remerciements. L'essentiel de ce travail est inclus dans ma thèse de doctorat, réalisée à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Marc Hindry et Michel Waldschmidt, ainsi que Joseph Oesterlé, pour de nombreuses discussions sur ce sujet. La rédaction a été finie lors de mon séjour post-doctoral à Rome financé par le réseau GTEM ; je remercie Carlo Gasbarri et Francesco Pappalardi pour leur accueil.

Références

- [1] Belyĭ, G.V., *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izvestija, Vol. 14, n°2 (1980).
- [2] Bilu, Yu. F., *Quantitative Siegel's theorem for Galois coverings*, Compositio Math. 106 (1997), no. 2, 125-158.
- [3] Bugeaud, Y. *On the size of integer solutions of elliptic equations*, Bull. Austral. Math.Soc. vol. 57 (1998), 199-206.
- [4] Bugeaud, Y. *Bounds for the solutions of superelliptic equations*, Compositio Math. 107 (1997), 187-219.
- [5] Bugeaud, Y., Györy, K., *Bounds for the solutions of unit equations*, Acta Arith. 74 (1996), 273-292.
- [6] Elkies, N.D., *ABC implies Mordell*, Int. Math. Res. Not. 7 (1991), 99-109.
- [7] Esnault, H., Viehweg, E., *Effective bounds for semipositive sheaves and for the height of points of curves over complex function fields*, Compos. Math. 76, No.1/2 (1990), 69-85.
- [8] Frankenhuysen, M. van, *The ABC conjecture implies Roth's theorem and Mordell's conjecture*, Matemática Contemporânea, Vol. 16 (1999), 45-72.
- [9] Grothendieck, A., *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1971).
- [10] Hadju, L., Herendi, T., *Explicit bounds for the Solutions of Elliptic Equations with Rational Coefficients*, J. symbolic Computation 25 (1998), 361-366.
- [11] Hindry, M., Silverman, J.H., *The canonical height and integral points on elliptic curves*, Invent. Math. 93, No.2 (1988), 419-450.
- [12] Hindry, M., Silverman, J.H., *Diophantine Geometry. An introduction*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] Kubert, D., Lang, S., *Units in the Modular Function Field I*, Math. Ann. 218 (1975), 67-96.
- [14] Mason, R.C., *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series 96, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [15] Masser, D.W., *On abc and discriminants*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 130, Number 11, (2002), 3141-3150.

- [16] Moret-Bailly, L., *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques*, Astérisque 183, (1990), 37-58.
- [17] Oesterlé, J., *Nouvelles approches du "théorème" de Fermat*, Séminaire Bourbaki, 40ème année, n°694, février 1998.
- [18] Poulakis, D., *Bounds for the size of integral points on curves of genus zero*, Acta Math. Hung. 93, n°4, 327-346 (2001).
- [19] Poulakis, D., *Points entiers sur les courbes de genre 0*, Colloq. Math. 66 (1993), n°1, 1-7.
- [20] Serre, J.-P., *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Third edition. Aspects of Mathematics. Vieweg (1997).
- [21] Serre, J.-P., *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. n°54, (1981), 323-401.
- [22] Siegel, C.L., *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Pr. Akad. Wiss. 1 (1929) 41-69 (Ges. Abh., I, 209-266).
- [23] Stewart, C.L., Tijdeman R., *On the Oesterlé-Masser Conjecture*, Monatsh. Math., 102, (1986), 251-257.
- [24] Stewart, C.L., Yu, Kunrui, *On the abc conjecture, II*, Duke Math. J. 108 (2001), n°1, 169-181.
- [25] Surroca, A., *Méthodes de transcendance et géométrie diophantienne*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, soutenue le 1er décembre 2003. (100 pages) <http://www.alg-geo.epfl.ch/~surroca>
- [26] Surroca, A., *Siegel's theorem and the abc conjecture*, Proceedings of the Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri, Parma, Nov. 2003. Riv. Mat. Univ. Parma (7) (2004), 323-332.
- [27] Szpiro, L., *Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*, Séminaire sur les pincesaux de courbes de genre au moins deux, Astérisque 86 (1981), 44-78.
- [28] Vojta, P., *On algebraic points on curves*, Compos. math. 78 (1991), no. 1, 29-36.

Andrea Surroca Ortiz
 École Polytechnique Fédérale de Lausanne
 FSB IMB CSAG
 MA C3 635 (Bât. MA)
 Station 8
 CH-1015 Lausanne
andrea.surroca@epfl.ch