FEUILLE D'EXERCICES 1

Espaces vectoriels normés - Espaces métriques.

Exercice 1 : Ensembles

Soient E, F et G trois ensembles. Montrer, en faisant un dessin, puis par une preuve formelle, les propriétés suivantes :

1. a) $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
   b) $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$
2. a) $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
   b) $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$
3. a) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
   b) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
4. Si $E \cup F = E \cap F$ alors $E = F$.

Exercice 2 : Bornes

Calculer la borne supérieure, M, et la borne inférieure, m, de l'ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. M est-il un maximum ? m est-il un minimum ?

Exercice 3 : Boules

Dessiner (en justifiant vos dessins) les boules unités associées aux normes suivantes de $\mathbb{R}^2$: $\| \;\|_2$, $\| \;\|_\infty$ et $\| \;\|_1$.

Exercice 4 : Normes matricielles

Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes à coefficients réels. Pour A et B dans E, on note $\langle A|B\rangle$ la trace de la matrice $({}^tA)B$.

a) Montrer que $\langle \; | \; \rangle$ est un produit scalaire sur E.

b) On note $\| \;\|_2$ la norme associée. Exprimer $\| A \|_2$ en fonction des coefficients de la matrice A.

c) On note $\| \;\|_\infty$ la norme qui à A associe $\max\{|a_{ij}|,\ 1 \leq i,j \leq n\}$. Trouver deux constantes m et M optimales telles que, pour toute matrice A dans E,

$$m \| A \|_\infty \leq \| A \|_2 \leq M \| A \|_\infty$$

Exercice 5 : Exemples de normes sur $\mathbb{R}^2$

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\| (x,y) \| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}$ Montrer que $\| \;\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application

$$N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$$

   est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 : Une propriété des normes

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad | \parallel x \parallel - \parallel y \parallel | \leq \parallel x - y \parallel$$

Exercice 7 : Définition d'une distance

1. Soient d et δ deux distances sur un ensemble E, et soit λ un réel strictement positif.
   a) Montrer que $\lambda d : (x, y) \mapsto \lambda d(x, y)$ est une distance sur E.
   b) Montrer que $(E, d + \delta)$ est un espace métrique.
2. En déduire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ et pour toutes distances $d_1, \dots, d_n$ sur E, $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n$ est une distance sur E.

Exercice 8 : Un exemple "concret"

Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\delta(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x, y \text{ et } 0 \text{ sont alignés,} \\ d(x, 0) + d(0, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Faire un joli dessin.
b) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
c) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. On suppose $x \neq 0$, et on note $r = \frac{1}{2} d(x, 0)$. Dessiner les boules $B_\delta(x, r)$ et $B_\delta(x, 3r)$.
d) Quelle réalité concrète la distance δ modélise-t-elle ?

Exercice 9 : Distances et Normes

Soit E un espace vectoriel, muni d'une distance d. Montrer que d dérive d'une norme si et seulement si elle vérifie les deux propriétés :
a) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$
b) $\forall x, y, a \in E, \ d(x + a, y + a) = d(x, y)$.

Exercice 10 : Normes et produits scalaires

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $\| \ \|$ vérifie l'égalité du parallélogramme si :

$$\forall x, y \in E, \ \parallel x - y \parallel^2 + \parallel x + y \parallel^2 = 2\,(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2)$$

1. On suppose que, pour tous $x, y \in E$,
$$\parallel x - y \parallel^2 + \parallel x + y \parallel^2 \leq 2\,(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2)$$
   Montrer que $\| \ \|$ vérifie l'égalité du parallélogramme.
2. On suppose que $\| \ \|$ dérive d'un produit scalaire. Montrer qu'elle vérifie l'égalité du parallélogramme.
3. (*difficile*) On suppose que $\| \ \|$ vérifie l'égalité du parallélogramme. Monter qu'elle dérive d'un produit scalaire.