Approximation diophantienne dans les variétés abéliennes

Manuel Pégourié-Gonnard

16 avril 2009

Ce texte s'adresse à un lecteur familier avec au moins quelques notions d'approximation diophantiennes. Il vise à donner un aperçu relativement précis, mais lisible, de mon sujet de thèse et de ses relations avec d'autres résultats en approximation diophantienne.

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne, de dimension g, définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. On suppose selon ses goûts que $\mathcal{A}$ est munie d'un fibré ample et symétrique $\mathcal{L}$, ou que $\mathcal{A}$ est plongée une fois pour toute dans un espace projectif $\mathbf{P}^n$ par un plongement associé à un tel fibré.

On dispose alors sur $\mathcal{A}$ de deux notions intéressantes, héritées de l'espace projectif ambiant : une hauteur, et (pour tout place v de $\boldsymbol{k}$) une distance v-adique. Je ne dirai pas grand-chose de la hauteur, avec laquelle je suppose le lecteur familier. Parlons un peu de la notion de distance, et de quelques-une de ses propriétés.

La distance que j'utilise est celle définie dans [Phi01], qui se mesure entre un point (fermé) et une sous-variété (pas forcément réduite ni irréductible, c'est-à-dire un sous-schéma fermé) de $\mathbf{P}^n$. Dans le cas où la sous-variété en question est une hypersurface H, définie par une équation F, la distance entre un point x de coordonnées x et V est définie comme

$$\mathrm{dist}_v(x, H) = \frac{|F(\mathrm{x})|_v}{\|F\|_v \|\mathrm{x}\|_v} .$$

Intuitivement, cette quantité traduit bien la notion de distance, et notamment s'annule si et seulement si x est sur H. La théorie de l'élimination permet d'étendre cette idée au cas général.

On peut aussi définir une notion « naïve » de distance entre les points de l'espace projectif, par la formule

$$\mathrm{dist}_v(x, y) = \frac{\|\mathrm{x} \wedge \mathrm{y}\|_v}{\|\mathrm{x}\|_v \|\mathrm{y}\|_v} .$$

Pour peu qu'on ai choisi une bonne norme aux places archimédiennes, ceci définit une distance au sens usuel [Jad96]. On peut alors en déduire une notion de distance entre un point x et une variété V, en prenant le minimum de la distance entre x et les points de $V(\mathbf{C}_v)$. Ceci définit une notion différente de la précédente, mais les deux sont comparables.

J'attire l'attention du lecteur sur le fait que cette notion locale, projective, de distance n'a *a priori* rien à voir avec la notion de distance dans l'espace de Mordell-Weil, qui est globale et repose sur l'existence d'une variété abélienne ambiante. Maintenant que nous sommes familiers avec les objets en jeu, énonçons le théorème 2 de [Fal91].

Théorème 1. *Soit V une sous-variété quelconque d'une variété abélienne $\mathcal{A}$ plongée comme précédemment, v une place de $\boldsymbol{k}$, et $\varepsilon > 0$. Il n'existe qu'un nombre fini de points x dans $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ tels que*

$$0 < \mathrm{dist}_v(x, V) \leqslant \mathrm{H}(x)^{-\varepsilon} , \tag{HA}$$

où H *désigne la hauteur de Weil multiplicative.*

Comme de nombreux énoncés de géométrie diophantiennes, ce résultat n'est malheureusement pas effectif au sens suivant : on ne voit à l'heure actuelle pas de moyen de borner la hauteur des points satisfaisant à l'hypothèse d'approximation (HA). Ainsi que le fait remarquer Faltings dans l'introduction de son article : « *As far as I can see, everything here is ineffective beyond hope.* »

Il semble néanmoins raisonnable de vouloir majorer le nombre de points rationnels satisfaisant à (HA) (que nous appellerons à l'occasion les approximations exceptionnelles), ou au moins de donner quelques informations quantitatives explicites à leur sujet. C'est à cette question que ma thèse vise à répondre.

Plus précisément, ce type d'énoncé quantitatif est généralement obtenu en combinant une inégalité à la Vojta et une inégalité à la Mumford. Il est peut-être utile de rappeler ici brièvement en quoi consistent ces deux inégalités. Toutes deux s'énoncent dans l'espace de Mordell-Weil de la variété, muni de la forme quadratique donnée par la hauteur normalisée de Néron-Tate. Je les énonce ici sous une forme générique avec une condition (C) qui peut être par exemple l'hypothèse d'approximation (HA) ci-dessus, ou une autre condition pour l'ex-conjecture de Mordell-Lang.

L'inégalité de Vojta affirme qu'il n'existe pas de suite $x_1, \dots, x_m$ de points satisfaisant simultanément à la condition (C) et aux trois conditions suivantes :

(*i*) $\hat{h}(x_1) > \alpha$;

(*ii*) $\widehat{(x_i, x_j)} < \beta$ pour tous i et j ;

(*iii*) $\hat{h}(x_i) > \gamma \hat{h}(x_{i-1})$ pour $i > 1$;

où l'angle est relatif à la structure euclidienne de l'espace. Nous appellerons *cône tronqué* une partie de l'espace délimitée par les conditions (*i*) et (*ii*). Il est clair que l'espace privé d'une boule de rayon $\sqrt{\alpha}$ peut être recouvert par un nombre fini de tels cônes tronqués dès qu'il est de dimension finie (ce qui est la cas si on se place sur un corps de nombre. L'inégalité de Vojta assurant qu'il n'y a qu'un nombre fini de points sous la condition (C) dans chaque cône, permet e conclure à la finitude.

L'inégalité de Mumford peut s'énoncer de façon très similaire. Elle dit qu'il n'existe pas de paire de points x et y satisfaisant à (C) et aux conditions suivantes :

(*i*) $\hat{h}(y) > \hat{h}(x_1) > \alpha$;

(*ii*) $\widehat{(x, y)} < \beta$;

(*iii*) $\hat{h}(y) < \delta \hat{h}(x)$.

Utilisée conjointement avec l'inégalité de Vojta, et à condition que les constantes apparaissant dans ces deux inégalités soient effectives, elle permet de majorer le nombre de points dans chaque cône tronqué, donc le nombre total de point (modulo un résultat, assez indépendant, de décompte des « petits » points).

La démonstration de Faltings consiste précisément à démontrer une inégalité de Vojta, non effective, qui suffit à assurer la finitude. Mon travail consiste donc d'une part à rendre effective cette inégalité de Vojta, et à lui adjoindre une inégalité de Mumford, elle aussi effective.

2 Relation avec d'autres énoncés

2.1 Le théorème de Roth

Le théorème de Roth, dans sa version étendue aux places quelconques par Ridout, peut s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 2. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ un algébrique. Soient par ailleurs $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres et v une place de $\boldsymbol{k}$, étendue de façon arbitraire à $\boldsymbol{k}(\alpha)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in \boldsymbol{k}$ tels que*

$$|x - \alpha|_v < H(x)^{-2-\varepsilon}\,.$$

Le lien avec le théorème précédent est clair : on passe de l'un à l'autre en remplaçant α par V et $\boldsymbol{k} = \mathbf{A}^1(\boldsymbol{k})$ par $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$, la distance étant bien sûr représentée par $|x-\alpha|_v$. Le théorème 2 de [Fal91] est donc aux variétés abéliennes ce que le théorème de Roth est à la droite.

Très rapidement après la démonstration initiale de Roth, on a su établir des versions quantitatives du théorème. Plus précisément, la démonstration de Roth consiste en un fait qu'on peut, anachroniquement, appeler une inégalité à la Vojta : il n'existe pas de suite $x_1, \dots, x_m$ d'approximations exceptionnelles telle que $\mathrm{H}(x_1) > c_1$ et pour tout $i > 1$, $\mathrm{H}(x_i) > c_2 \cdot \mathrm{H}(x_{i-1})$.

Pour établir une version quantitative du théorème de Roth, il a fallu expliciter une valeur admissible des constantes c_1 et c_2, d'une part, et d'autre part lui adjoindre un inégalité que j'appellerai encore anachroniquement à la Mumford, disant qu'il existe une constante c_3 telle que deux approximations exceptionnelles x et y, de hauteur assez grande, satisfont toujours $H(x) > c_3 H(y)$. Dans le cas du théorème de Roth, ceci découle immédiatement de l'inégalité de la taille. La conjonction de ces deux inégalités donne clairement un décompte des approximations exceptionnelles de hauteur assez grande.

Rappelons aussi que le théorème de Roth a été l'aboutissement d'une longue série de théorèmes d'approximations moins précis, en ce sens que l'exposant optimal $2+\varepsilon$ n'était pas atteint. Ce série a débuté avec le théorème de Liouville. Dans le contexte de ma thèse, l'équivalent de l'inégalité de Liouville peut s'énoncer ainsi :

Théorème 3. *Soient V une variété projective de degré d, et $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ un point algébrique. Si x n'appartient pas à V, on a*

$$\mathrm{dist}_v(x, V) \geqslant c(n,d)\,\mathrm{H}(V)^{-1} \cdot \mathrm{H}(x)^{-d}\,.$$

Dans le cas où V est une hypersurface, c'est une application directe du théorème du produit (et $c(n,d) = 1$), et on peut se ramener à ce cas en général, quitte à prendre une valeur beaucoup plus petite pour $c(n,d)$. Comme on le verra en 2.3, il est intéressant dans les applications de disposer d'un exposant meilleur que d.

2.2 L'ex-conjecture de Mordell-Lang

Dès 1922, Mordell avait conjecturé l'énoncé suivant, aujourd'hui théorème de Faltings.

Théorème 4. *Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geqslant 2$, définie sur un corps de nombre $\boldsymbol{k}$. L'ensemble $C(\boldsymbol{k})$ des points rationnels de C est fini.*

Ce résultat a d'abord été prouvé par Faltings en 1983 comme conséquence d'une conjecture de Shafarevitch. La preuve fait intervenir des espaces de modules de variétés abéliennes, et c'est à cette occasion que Faltings a introduit la hauteur qui porte désormais son nom, sur cet espace. Néanmoins, cette preuve reste assez éloignée des méthodes traditionnelles de l'approximation diophantienne.

Une preuve totalement indépendante a été publiée en 1991 par Vojta. Elle se rapproche grandement des idées habituelles de l'approximation diophantienne, en introduisant ce qu'on appelle maintenant l'inégalité de Vojta. La preuve est ensuite simplifiée (« *avoid[ing] the difficult Arakelov theory in Vojta's paper* ») et étendue par Faltings pour prouver une conjecture de Lang, généralisant celle de Mordell, et qui s'énonce ainsi.

Théorème 5. *Soit V une sous-variété d'une variété abélienne $\mathcal{A}$, définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. Si V ne contient pas de translaté de sous-variété abélienne stricte, alors $V(\boldsymbol{k})$ est fini.*

Ceci généralise la conjecture de Mordell, qui correspond au cas où V est une courbe et $\mathcal{A}$ sa jacobienne. Ce résultat est proche du sujet de ma thèse dans le sens suivant : il consiste à montrer la finitude des points rationnels *sur* une sous-variété de variété abélienne, alors que je cherche à contrôler les points *proches* d'une telle sous-variété. Il est d'ailleurs significatif que Faltings a prouvé ces deux théorèmes (la conjecture de Mordell-Lang et celui que je cherche à rendre quantitatif) dans le même article : une bonne partie des outils sont commun aux deux preuves.

Une différence notable entre les deux situations est toutefois la suivante : pour étudier les points qui sont proches d'une sous-variété, sans appartenir à cette variété, on n'a pas besoin de supposer que celle-ci ne contient pas de translaté de sous-groupe. En fait, le résultat reste valable même pour les approxitaions d'une sous-variété abélienne.

Des versions quantitatives du théorème 1 de [Fal91] ont été établies ensuite. Signalons la relecture de la preuve par Bombieri, qui simplifie certains arguments en les rapprochant de l'effectivité, et le travail de De Diego sur les familles de courbes. En 1999, Rémond prouve une version totalement effective de l'inégalité de Vojta, puis lui adjoint une inégalité à la Mumford, établissant ainsi une version quantitative explicite de l'ex-conjecture de Mordel-Lang. Enfin, le chapitre 3 de la thèse de Farhi [Far03] donne une version quantitative de Mordell, démontrée dans un formalisme plus élémentaire que celui de Rémond.

2.3 Le théorème de Siegel et une ex-conjecture de Lang

Le théorème de Siegel, démontré en 1929, affirme qu'une courbe de genre supérieur ou égal à 1 ne possède qu'on nombre fini de points entiers. Sa démonstration repose sur le théorème de Roth énoncé plus haut, et avait été obtenu par Siegel avec la version faible de cet énoncé dont il disposait en 1929. Une généralisation du théorème a été conjecturée par Lang, de façon analogue à sa généralisation de la conjecture de Mordell : si E est un diviseur ample d'une variété abélienne $\mathcal{A}$, alors $A \setminus E$ ne possède qu'un nombre fini de points entiers. Le théorème original s'en déduit là aussi en considérant la courbe dans sa jacobienne (à cette différence qu'ici la courbe peut être sa jacobienne, dans le cas $g = 1$).

Cette conjecture de Lang est en fait un corollaire du théorème 2 de [Fal91] : on remarque que la hauteur (relative à E) d'un point entier x est essentiellement donné par le produit des inverse des distances v-adiques de x à E quand v parcourt les places archimédiennes de $\boldsymbol{k}$. Or ces distances sont minorées par $\mathrm{H}(()x)^{-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, sauf pour un nombre fini de points. Ceci est bien sûr contradictoire dès que $\varepsilon < 1$, ce qui prouve que seules les approximations exceptionnelles de E peuvent donner des points entiers. Dénombrer ces dernières donne donc immédiatement une version quantitative de cette ex-conjecture de Lang. C'est pour ce type d'applications qu'il devient essentiel dans l'énoncé d'approximation de pouvoir prendre ε petit, au moins inférieur à 1, alors que l'exposant d de l'inégalité de Liouville ne suffit en aucun cas.

Signalons qu'on connaît des versions quantitatives du théorème de Siegel (??). Par contre, à ma connaissance, la seule démonstration connue de sa généralisation est celle de Faltings : en particulier on ne connaît pas de version quantitative de cette ex-conjecture de Lang.

Enfin, en un sens, on peut avoir l'impression que le théorème de Faltings (ex-conjecture de Mordell-Lang) rend obsolète le théorème de Siegel et sa généralisation conjecturée par Lang : en effet, n'avoir qu'un nombre fini de point rationnels implique de n'avoir qu'un nombre fini de points entiers. En fait, les énoncés de type Siegel conservent un intérêt essentiellement grâce à la restriction « ne pas contenir de sous-variété abélienne » dans Mordell-Lang : si on prend le cas extrême d'un variété abélienne, il est clair que (sur un corps de nombres pas trop petit) elle possède une infinité de points rationnels, alors qu'elle n'a qu'un nombre fini de points entiers.

3 Références

La preuve utilise la méthode de Vojta. Dans mon travail, je m'appuie principalement sur les travaux de Rémond [Rémooa ; Rémoob ; Rémo5], de Farhi [Faro3], ainsi que la preuve originale de Faltings [Fal91]. Le formalisme majoritairement utilisé est celui exposé dans [Phio1 ; Rém].

[Fal91] Gerd Faltings. « Diophantine approximation on abelian varieties ». Dans : *Ann. of Math. (2)* 133.3 (1991), p. 549–576. ISSN : 0003-486X.

[Faro3] Farhi. « Approximations diophantiennes sur les groupes algébriques commutatifs ». Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, 2003.

[Jad96] Christian Jadot. « Critères pour l'indépendance linéaire et algébrique ». Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, 1996.

[PNo1] Patrice Philipon et Youri Nesterenko, éds. *Introduction to algebraic independance theory*. LNM 1752. Springer, 2001.

[Phio1] Patrice Philippon. « Diophantine geometry ». Dans : *Introduction to algebraic independance theory [PNo1]*. Sous la dir. de Patrice Philipon et Youri Nesterenko. 2001.

[Rém] Gaël Rémond. « Géométrie diophantienne multiprojective ». Dans : *Introduction to algebraic independance theory [PNo1]*. Sous la dir. de Patrice Philipon et Youri Nesterenko.

[Rémooa] Gaël Rémond. « Décompte dans une conjecture de Lang ». Dans : *Invent. Math.* 142.3 (2000), p. 513–545. ISSN : 0020-9910.

[Rémoob] Gaël Rémond. « Inégalité de Vojta en dimension supérieure ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 29.1 (2000), p. 101–151. ISSN : 0391-173X.

[Rémo5] Gaël Rémond. « Inégalité de Vojta généralisée ». Dans : *Bull. Soc. Math. France* 133.4 (2005), p. 459–495. ISSN : 0037-9484.