

Intégration numérique  
et calculs de fonctions L  
thèse de doctorat

Pascal Molin

Université Bordeaux 1

18 octobre 2010

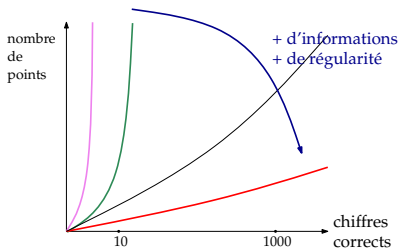
# Intégration numérique

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \text{[Diagram of a green semi-circle from -1 to 1]} \approx \text{[Diagram of a semi-circle approximated by light blue rectangles]} \approx 1.570796$$

Méthodes :

- Monte Carlo
- rectangles, trapèzes
- Simpson
- Gauss-Legendre
- double-exponentielle

Convergence :



En théorie des nombres :

- calculer vite **beaucoup** de chiffres **corrects**.
- fonctions très régulières, dont on connaît le comportement.

# Intégration rapide et prouvée

## Théorème 1.1

Si  $f$  est une fonction définie sur  $[-1, 1]$ , holomorphe sur  $D(0, 2)$ , alors pour tout  $n \geq 1$

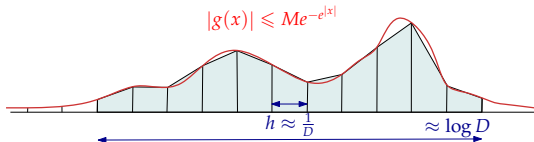
$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{k=-n}^n a_k f(x_k) \right| \leq \left( e^4 \sup_{D(0,2)} |f| \right) \exp\left(-\frac{5n}{\log(5n)}\right)$$

avec  $h = \frac{\log(5n)}{n}$ ,  $a_k = \frac{h \cosh(kh)}{\cosh(\sinh(kh))^2}$  et  $x_k = \tanh(\sinh(kh))$ .

# Méthode double-exponentielle

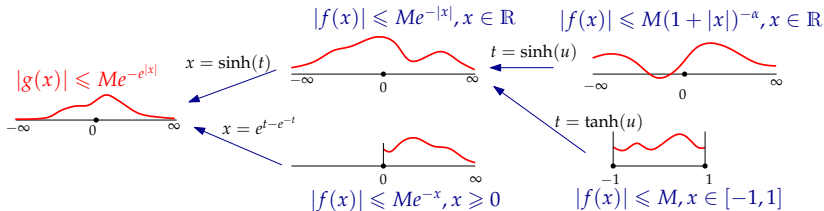
[Takahasi&Mori,1974]

- Formule des trapèzes pour  $g$  à décroissance DE



$D$  chiffres avec  $\approx D \log D$  évaluations.

- Cas général : changements de variables choisis selon l'intégrande



## Insuffisances

Méthode très efficace

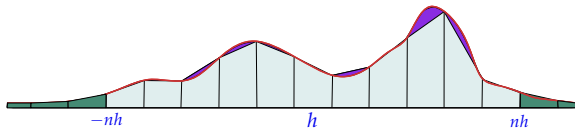
```
gp > \p100
  realprecision = 105 significant digits (100
    digits displayed)
gp > oo=[1];
gp > intnum(t=-oo,oo,1/(1+t^2))-Pi
time = 116 ms.
%3 = 0.E-105
```

...mais pas prouvée.

```
gp > intnum(t=-oo,oo,1/(1+(t+10)^2))-Pi
time = 104 ms.
%4 = 6.79601547... E-11
```

## Formule de Poisson

$$h \underbrace{\sum_{|k|>n} g(kh)}_{\textcircled{1}} + h \sum_{k=-n}^n g(kh) = \int_{\mathbb{R}} g + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right)}_{\textcircled{2}}$$



Erreurs  $\textcircled{1}(nh)$  et  $\textcircled{2}\left(\frac{1}{h}\right)$ .

La formule des trapèzes est intéressante si  $g$  et  $\hat{g}$  sont simultanément rapidement décroissantes.

## Erreur de quadrature

Deux ingrédients :

- Paley-Wiener

«régularité de  $g \leftrightarrow$  décroissance de  $\hat{g}$ »

### Théorème 1.2

Si  $g$  possède un prolongement holomorphe à  $\Delta_\tau = \mathbb{R} + i[-\tau, \tau]$  et vérifie :

- $\|g(\cdot - i\tau)\|_1 + \|g(\cdot + i\tau)\|_1 = M_2(\tau) < \infty$  ;
- $g(x \pm it) \rightarrow_{x \rightarrow \pm\infty} 0$  uniformément en  $t < \tau$  ;

alors  $|\hat{g}(x)| \leq M_2(\tau) e^{-2\pi\tau|x|}$ .

donc  $|\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}(\frac{k}{h})| \leq e^{-D}$  pour  $h \leq \frac{2\pi\tau}{D + \log(4M_2(\tau) + 1)}$ .

## Erreur de quadrature

Deux ingrédients :

- Paley-Wiener  
«régularité de  $g \leftrightarrow$  décroissance de  $\hat{g}$ »
- Phragmén-Lindelöf  
«extension des variations exponentielles»

### **Théorème 1.4**

*Si  $g$  est holomorphe sur  $\Delta_\tau$  et vérifie*

- $|g| = O(e^{-\alpha e^{\beta|x|}})$  sur  $\mathbb{R}$  ;
- $|g| \leq M$  sur  $\Delta_\tau$  ;

*alors pour  $t < \tau$ ,  $|g(x \pm it)| \leq M e^{-\alpha_t e^{\beta|x|}}$ , avec*

$$\alpha_t = \alpha \left( \cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta \tau)} \right).$$

→ valeur explicite de  $M_2(t) = \|g(\cdot \pm it)\|_1$ .

## Théorème principal

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant

- 1  $g$  possède un prolongement holomorphe sur une bande  $\Delta_\tau = \mathbb{R} + i] - \tau, \tau[$ ;
- 2  $|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $\alpha, \beta > 0$ ;
- 3  $|g(z)| \leq M_2 e^{\lambda|z| + A e^{\gamma|z|}}$  sur  $\Delta_\tau$  avec  $\gamma < \beta$ ;

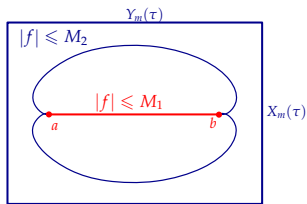
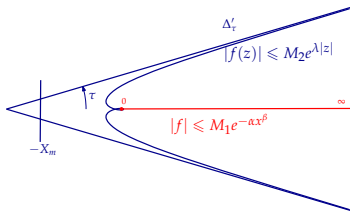
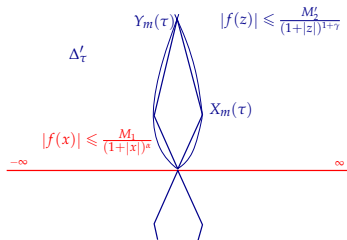
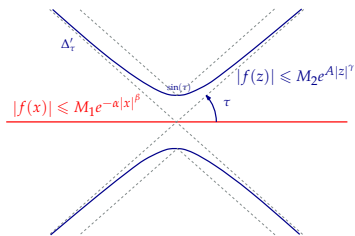
alors, pour tout  $D > 0$ , avec des valeurs **explicités** de  $h$  et  $n$  vérifiant

$$h \sim \frac{2\pi\tau}{D + \log(M_2)} \quad \text{et} \quad n \sim \frac{\log(D + \log(M_1))}{h\beta}$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^n g(kh) \right| \leq e^{-D}.$$

# Changements de variable



Dans chacune des situations ci-dessus, la méthode double-exponentielle permet de calculer  $\int f$  à précision absolue  $D$  prouvée avec  $O\left(\frac{D \log D}{2\pi\tau}\right)$  évaluations de  $f$ .

## Extensions

- Extension des résultats aux fonctions méromorphes.

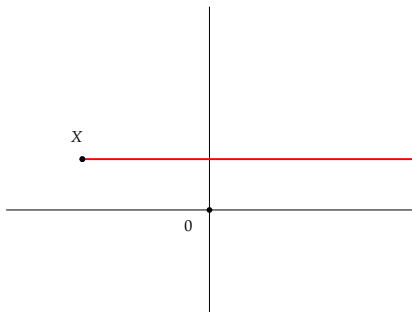
```
? \p1000
realprecision = 1001 significant digits
? f(z)=1/(1+z^2);
? tau=Pi/2.2;
? h=2*Pi*tau/(1000*log(10)+log(2/cos(tau)))
%6 = 0.003892182386142456451
? n=ceil(asinh(asinh(2*10^1000))/h)
%7 = 2168
? diff=Pi-integration_shsh(z->f(z-15),h,n,1)
%9 = 2.988841749810731359 E-14
? Rho=[15+I,15-I];Res=[-I/2,I/2];
? diff+poles_shsh(Rho,Res,h)
%11 = -2.9500027961671405652 E-1002 + 0.E-1014*I
```

- Décalages de chemin : intégrer au milieu de la bande.

## Application

Fonction gamma incomplète :

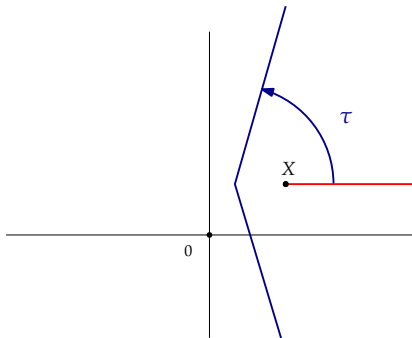
$$\Gamma_{\text{inc}}(s, X) = \int_X^{\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \text{ pour } s \in \mathbb{C} \text{ et } X \notin \mathbb{R}_-.$$



## Application

Fonction gamma incomplète :

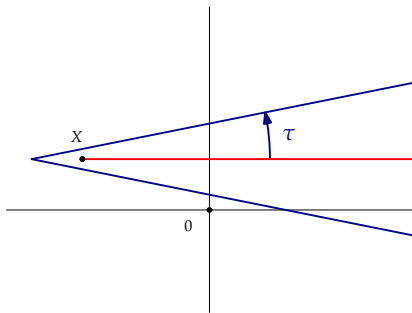
$$\Gamma_{\text{inc}}(s, X) = \int_X^{\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \text{ pour } s \in \mathbb{C} \text{ et } X \notin \mathbb{R}_-.$$



## Application

Fonction gamma incomplète :

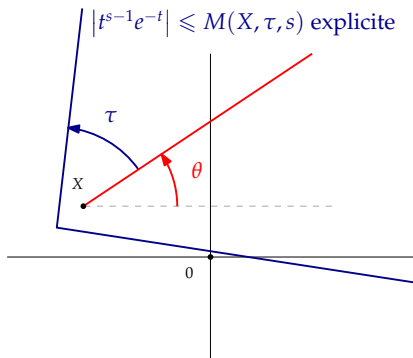
$$\Gamma_{\text{inc}}(s, X) = \int_X^{\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \text{ pour } s \in \mathbb{C} \text{ et } X \notin \mathbb{R}_-.$$



## Application

Fonction gamma incomplète :

$$\Gamma_{\text{inc}}(s, X) = \int_X^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t} \text{ pour } s \in \mathbb{C} \text{ et } X \notin \mathbb{R}_-.$$



$\Gamma_{\text{inc}}(s, X)$  calculable à précision  $D$  en  $n \sim \frac{2D \log D}{\pi^2}$  évaluations.

# Application au calcul de fonctions L

## Fonctions L

Pour une famille arithmétique  $(a_n)$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$

$$L(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}, \quad \text{Re}(s) \gg 1.$$

Hypothèses standard :

- fonction complétée :

$$\Lambda(s) = \underbrace{\left(\frac{q}{\pi^r}\right)^{\frac{s}{2}}}_{Q^s} \underbrace{\prod_{i=1}^r \Gamma\left(\frac{s + \mu_i}{2}\right)}_{\gamma(s)} L(s)$$

méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , avec un nombre fini de pôles  $\rho_i$ .

- équation fonctionnelle  $\Lambda(s) = \varepsilon \Lambda^*(w - s)$

## Calcul numérique

[Lavrik1966] À partir de l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s) = \sum_{k \geq 1} a_k G(s, \frac{k}{Q}) + \varepsilon \sum_{k \geq 1} a_k^* G(w - s, \frac{k}{Q}) + \sum_i \frac{r_{\rho_i}}{s - \rho_i}$$

où

$$G(s, x) = \int_{(\delta)} \frac{\gamma(z)x^{-z}}{z - s} dz, \quad \delta > \max(1, \operatorname{Re}(s)).$$

Calcul de  $G(s, x)$

- somme de résidus : Tollis (1997) Dokchitser (2002), Booker (2005)
- intégration numérique : Rubinstein(2005)
- fractions continuées : Dokchitser (2002), Cohen-Zagier.

## Calcul numérique

[Lavrik1966] À partir de l'équation fonctionnelle **approchée**

$$\Lambda(s)v(s) = \sum_{k \geq 1} a_k G_v(s, \frac{k}{Q}) + \varepsilon \sum_{k \geq 1} a_k^* G_v^*(w - s, \frac{k}{Q}) + \sum_i \frac{r_{\rho_i} v(\rho_i)}{s - \rho_i}$$

où  $v(z) = e^{-\frac{i\pi r \eta z}{4}} e^{A(z-s)^2}$  [Rubinstein],

$$G_v(s, x) = \int_{(\delta)} \frac{\gamma(z)v(z)x^{-z}}{z - s} dz, \quad \delta > \max(1, \operatorname{Re}(s)).$$

Calcul de  $G_v(s, x)$

- somme de résidus : ~~Tollis (1997) Dokchitser (2002)~~, Booker (2005)
- intégration numérique : Rubinstein(2005)
- fractions continues : ~~Dokchitser (2002)~~, Cohen-Zagier.

## Algorithme prouvé

### Résultats

- démonstration de la décroissance de  $x \mapsto G_v(s, x)$  ;
- schéma d'intégration prouvée uniforme en  $x$ .

$$\sum_{k=1}^N a_k G\left(s, \frac{k}{Q}\right), \quad G(s, x) \approx \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \frac{\gamma(z_\ell) v(z_\ell) x^{-z_\ell}}{z_\ell - s}$$

$$\text{Calcul de } \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \frac{\gamma(z_\ell) v(z_\ell)}{z_\ell - s} \left[ \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{k}{Q}\right)^{-z_\ell} \right].$$

# Algorithme prouvé

## Résultats

- démonstration de la décroissance de  $x \mapsto G_V(s, x)$  ;
- schéma d'intégration prouvée uniforme en  $x$ .

Problème : la théorie double-exponentielle ne s'applique pas !

Solutions :

- ① Le calcul de  $G_V(s, x)$  par intégration double-exponentielle converge en  $e^{-C_x \frac{n}{\log(n)^2}}$ .
- ② Avec le changement  $t \mapsto \sinh(t + i\theta)$  (décalage de contour), le calcul converge en  $e^{-C_{\theta,x} \frac{n}{\log(n)}}$ .

Soit  $L$  de degré  $r$ , de conducteur  $q$ .

### **Théorème 2.1**

*La méthode de Rubinstein permet de calculer  $L(\sigma + i\tau)$  à précision absolue  $D$  avec une complexité binaire*

$$C_1 \sqrt{q} \max(D, |\tau|)^{\frac{r}{2}} D^3 \log(D)^3.$$

### **Théorème 2.2**

*La méthode double-exponentielle permet de calculer  $L(\sigma + i\tau)$  à précision absolue  $D$  avec une complexité binaire*

$$C_2 \sqrt{q} \max(D, |\tau|)^{1+\frac{r}{2}} \log D \max(|\tau|, D)^2 \log(D).$$

# Conclusion

- Intégration numérique
  - méthode double-exponentielle bien comprise ;
  - convergence démontrée ;
  - utilisation simple.
- Calculs de fonctions L :
  - preuves de complexité et estimations génériques dans le cadre de facteurs de lissage ;
  - nouvelle méthode de calcul en précision arbitraire ;
  - résultat garanti.