

# Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales

C. Mœglin

Institut de mathématiques de Jussieu  
175 rue du Chevaleret F-75013  
moeglin@math.jussieu.fr

Dans ce travail  $k$  est un corps de nombres et  $k'$  est une extension quadratique de  $k$  qui n'intervient que quand on considère des groupes unitaires. Le programme d'Arthur consistant à ramener l'étude des formes automorphes d'un groupe classique à celui d'un groupe  $GL$  convenable est sur le point de s'achever. Il est donc intéressant de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme automorphe de carré intégrable d'un groupe classique ne soit pas cuspidale. On part des idées d'Arthur et les textes de base sont [3], [4] (référence qui ne suppose pas les groupes quasidéployés mais qui sont trop anciennes pour certains points de détail), [5] et sont annoncés en version complète pour un avenir proche; l'auteur a bien conscience que ses résultats sont conditionnels tant que les articles d'Arthur ne sont pas publiés, dans les références données les résultats sont suggérés mais non démontrés. Ici  $G$  est un groupe classique, on n'a pas inclus les groupes de similitudes ( $GU$ ,  $Gsp$ ,  $Gspin(2m+1)$ ) bienqu'il apparait maintenant avec [7] que les méthodes d'Arthur s'y appliqueront aussi et nos méthodes ont un degré de généralité suffisant pour s'y adapter. On va donc écrire ce que l'on utilise. Donc ici  $G$  est  $SO(2n+1, k)$ ,  $Sp(2n, k)$  ou un groupe unitaire  $U(n, k'/k)$ ; nos méthodes s'appliquent aussi aux groupes  $O(2n)$  mais on a essayé de limiter la technicité de l'article et on n'a donc pas écrit les sorites nécessaires pour ce groupe.

Pour simplifier, on introduit tout de suite une notation : soit  $a, b$  des entiers et  $\rho$  une représentation cuspidale unitaire de  $GL(d_\rho, k')$ , on note  $Speh(\rho, b)$  la représentation de carré intrégréable irréductible de  $GL(d_\rho b, k')$  dont le support cuspidal est  $\times_{i \in [(b-1)/2, -(b-1)/2]} \rho | \cdot |^i$ .

En plus du fait que les résultats d'Arthur ne sont pas disponibles, il y a une difficulté technique supplémentaire puisqu'on ne connaît pas la conjecture de Ramanujan pour les groupes  $GL$ ; ceci n'est absolument pas grave (cela a déjà été remarqué en [31]) mais cela complique la rédaction. On a donc décidé ici d'admettre la conjecture de Ramanujan pour rendre plus clair les idées mais on n'utilise la conjecture de Ramanujan que pour la description des paquets locaux (où on sait très bien comment il faut compléter) et dans aucun autre argument. Pour un résultat définitif, il faudra bien évidemment écrire quelques lemmes techniques supplémentaires qui ne posent aucun problème.

On suit Arthur [5] pour décrire le spectre discret en généralisant de façon à peu près évidente au cas des groupes unitaires et on reviendra sur le cas des groupes  $O(2n)$  ci-dessous; pour passer du cas non quasidéployé au cas général on utilise [5] (29.29) qui est un résultat dont toutes les démonstrations sont publiées et qui s'applique à tout groupe réductif connexe.

Suivant Arthur ([5] 30.10 et lignes suivant loc.cite 30.16), on note  $\psi$  le paramètre globale qui se décompose en  $\oplus_{i \in [1, d]} \psi_i$ , chaque  $\psi_i$  paramétrisant une représentation irréductible du spectre discret d'un groupe linéaire convenable défini sur  $k$  sauf si  $G$  est un groupe unitaire où  $k$  est remplacé par l'extension  $k'$ ; on note la représentation correspondante  $Speh(\rho_i, b_i)$  où  $\rho_i$  est une représentation cuspidale unitaire d'un groupe linéaire convenable et  $b_i$  est un entier; ce n'est donc pas  $\psi$  qui compte mais la représentation induite pour le groupe linéaire convenable  $\times_{i \in [1, d]} Speh(\rho_i, b_i)$ . Tous les paramètres de cette forme ne sont pas atteints; puisque l'on a endoscopie tordue, on a un automorphisme extérieur  $\theta_G$  qui est défini pour tout groupe linéaire défini sur  $k$  ou  $k'$  (respectivement), le paramètre  $\psi$  doit être invariant par  $\theta_G$ . Cela a un sens concret les séries d'Eisenstein sont holomorphes sur l'axe unitaire et définissent donc un morphisme de la représentation induite  $\times_{i \in [1, d]} Speh(\rho_i, b_i)$  dans l'ensemble des

formes automorphes du groupe linéaire convenable réalisé explicitement (une fois que l'on a choisi un sous-groupe de Borel standard);  $\theta_G$  opère sur l'ensemble des formes automorphes et on demande qu'il laisse stable cet espace. La deuxième condition simple est que l'ensemble de  $\psi_i$  est sans multiplicité (c'est la condition  $S_\psi$  fini d'Arthur [5] 30.12 et suivantes); ces 2 conditions sont équivalentes à ce que pour tout  $i \in [1, d]$ ,  $\theta_G \text{Speh}(\rho_i, b_i) \simeq \text{Speh}(\rho_i, b_i)$ . Il y a une troisième condition plus difficile à écrire; elle est expliquée dans [5] bas de la page 242, ce qui suit 30.13; l'idée est que les paramètres doivent se factoriser par le  $L$ -groupe de  $G$  mais ce n'est pas simple à écrire en l'absence de groupe tannakien. Arthur en donne une autre formulation (pas tout à fait équivalente) en [5] théorème 30.3 (a) à l'aide des pôles de fonction  $L$ . C'est cette formulation qu'il est facile de généraliser; il n'y pas tout à fait équivalence entre le fait que les fonctions  $L$  des  $\rho_i$  ont des pôles aux bons endroits et le fait que les paramètres se factorisent par le  $L$ -groupe de  $G$ ; il manque des conditions liées à la forme qui sert à définir  $G$  mais ces conditions sont un produit de conditions locales et donc sont impliquées par le fait que les paquets locaux ne doivent pas être vides (cf. ci-dessous). Pour faire simple, disons qu'il existe une représentation  $r_G$  de tout groupe linéaire complexe (associée à  $G$ ) tel que pour tout  $\psi$  pouvant intervenir comme paramètre globale, pour tout  $i \in [1, d]$ ,  $L(\rho_i, r_G, s)$  a un pôle en  $s = 1$  si et seulement si  $b_i$  est paire; pour les groupes symplectiques ou orthogonaux  $r_G$  est bien connue (cf. [5] th. 30.3) et pour les groupes unitaires; il faut prendre soit la fonction  $L$  d'Asai soit une tordue de cette fonction  $L$  suivant la parité de  $n$  dans  $G = U(n, k'/k)$ ; ceci est en fait expliqué dans les travaux de Ginzbourg, Rallis, Soudry résumé en [38] theorem 10) que l'on reprend ci-dessous; quand on considère la fonction  $L$  d'Asai ou sa variante tordue il faut regarder  $\rho_i$  comme une représentation d'un  $k$  groupe (on renvoie à [15]). Les travaux de Ginzburg, Rallis et Soudry expliquent d'ailleurs parfaitement cette condition de parité. On fixe  $\rho$  une représentation cuspidale unitaire d'un groupe de  $GL(d_\rho, \mathbb{A})$  ce qui définit  $d_\rho$ . Si  $L(\rho, s, r_G)$  a un pôle en  $s = 1$ , il est extrêmement facile de montrer que pour  $G$  quasiséployé de rang  $d_\rho$ ,  $G$  admet un sous-groupe parabolique de Levi isomorphe à  $GL(d_\rho, k)$  (ou  $k'$ ) et les séries d'Eisenstein construites avec les sections de l'induite de  $\rho||^s$  (où  $||$  est la valeur absolue adélique) ont un pôle d'ordre 1 en  $s = 1/2$  dont le résidu donne une représentation irréductible de carré intégrable. A l'inverse si  $L(\rho, s, r_G)$  n'a pas de pôle en  $s = 1$ , alors les travaux de Ginzburg, Rallis et Soudry (cf. le résumé en [38] theorem 10) montrent que  $\rho$  provient d'une représentation générique d'un groupe de même type que  $G$ , quasiséployé, groupe d'automorphisme d'une forme de dimension  $d$  avec  $d^* = d_\rho$  où  $d^*$  est l'analogue de  $n^*$  défini ci-dessus; le  $\beta_H$  de [38] theorem 10 est tel que  $L(\rho \times \rho, s) = L(\rho, r_G, s)L(\rho, \beta_H, s)$  et la même factorisation pour  $L(\rho \times \bar{\rho}, s)$  si  $G$  est un groupe unitaire. Ici on n'a écrit que des conditions "suffisantes".

On en vient maintenant aux paramètres locaux; on fixe donc la collection des  $(\rho_i, b_i)$  pour  $i \in [1, d]$  ci-dessus avec l'assertion de non multiplicité et de pôles de fonction  $L$  (ceci ne sert pas localement) et d'invariance sous  $\theta_G$  qui est la condition importante. On fixe  $v$  une place de  $k$  et on note  $\pi^{GL}(\psi_v)$  la représentation induite  $\times_{i \in [1, d]} \text{Speh}(\rho_i, b)_v$ ; il fait partie des annonces d'Arthur pour certains groupes ([5] theorem 30.1), annonce que nous généralisons de façon naturelle, qu'il existe un ensemble fini (éventuellement vide) de représentations disons irréductibles (on décompose en irréductibles les représentations de longueur finie d'Arthur), ensemble noté  $\Pi(\psi^{GL}(\psi_v))$  tel que si  $G$  est quasiséployé une bonne combinaison linéaire de ces représentations a comme transfert tordu la  $\theta_G$ -trace de  $\pi_v^{GL}$  et pour  $G$  quelconque les formules usuelles de transfert endoscopiques sont satisfaites. L'ensemble des représentations est vide exactement quand la trace tordue de  $\pi_v^{GL}$  n'est pas un transfert d'une distribution stable pour la forme quasiséployée de  $G$ . Ces propriétés introduisent une multiplicité locale et des caractères, on ne peut les décrire dans cette introduction. Localement il est beaucoup plus simple que globalement de savoir quand  $\Pi(\psi_v^{GL})$  est non vide, c'est effectivement la condition (disons conjecturalement) que le paramètre d'Arthur-Langlands naturellement associé à  $\pi_v^{GL}$  se factorise par le  $L$ -groupe de  $G$ . En plus des conditions simples liées au discriminant de la forme définissant  $G$ , il n'est pas du tout clair que la condition globale sur les pôles entraînent les conditions locales. A l'inverse, il est sûr que la condition globale n'est pas entraînée en général par les conditions locales. Pour rassurer le lecteur, disons que l'existence des paquets locaux aux places finies a été ramené en

[26] et [30] (pour les propriétés de transfert) au cas des paquets de Langlands des séries discrètes ; ce dernier cas, annoncé par Arthur, est accessible par les formules de traces simple. Et j'ai calculé tous les signes et montré que les multiplicités locales valent 1 si ceci est vrai pour les paquets de séries discrètes. Aux places archimédiennes, il n'est pas connu que la description d'Adams Barbasch Vogan ([1]) soit la même que celle d'Arthur sauf pour les groupes unitaires où cela a été montré dans [17] (transfert endoscopique tordue) et [2] (transfert endoscopique usuel) pour les représentations ayant de la cohomologie ; ici aussi les multiplicités locales sont 1.

On peut maintenant décrire le spectre discret de  $G$  ; soit  $\pi$  une représentation irréductible dans le spectre discret de  $G$ . Alors il existe  $\psi$  comme ci-dessus uniquement caractérisé par le fait que pour toute place  $v$ ,  $\pi_v$  est dans le paquet  $\Pi(\pi^{GL}(\psi_v))$ . C'est cette propriété que nous utilisons pour les résultats de ce travail.

Pour poser les conjectures on utilise aussi la réciproque : fixons  $\psi$  comme ci-dessus et pour tout  $v$  un élément  $\pi_v \in \Pi(\pi^{GL}(\psi_v))$  (ce qui suppose que cet ensemble est non vide), alors la représentation  $\otimes'_v \pi_v$  est isomorphe à une représentation du spectre discret de  $G$  si une conditions de signe est satisfaite (condition [5](30.15)) et la multiplicité de cette représentation dans le spectre discret est alors un produit des multiplicités locales, sauf dans le cas de  $SO(2n)$  où il faut tenir compte de l'automorphisme extérieur qui vient de  $O(2n)$  ; c'est expliqué dans [5] entre (30.10) et (30.11) puis page 249 de loc.cite, de cette façon, Arthur n'a pas remplacé le groupe  $SO(2n)$  par  $O(2n)$  mais presque et une fois les résultats d'Arthur écrits de façon définitive, il faudra faire une vérification pour calculer les multiplicités globales pour  $O(2n)$ . On a écrit l'article en ayant en tête que l'on ne peut pas connaître pour le moment les multiplicités locales (à cause des places archimédiennes) sauf dans le cas des groupes unitaires et des représentation ayant de la cohomologie.

Le travail de cet article consiste à partir d'une représentation irréductible de carré intégrable  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  ayant de la cohomologie à l'infini ; on admet donc que l'on sait lui associer,  $\psi$  comme ci-dessus et donc une représentation notée maintenant simplement  $\pi^{GL} \simeq \times_{(\rho,b) \in Jord(\pi)} Speh(\rho, b)$  où  $Jord(\pi)$  est un ensemble convenable ; pour toute place  $v$  de  $k$ ,  $\pi_v$  est dans le paquet local défini par  $\pi_v^{GL}$ , paquet que l'on note simplement  $\Pi(\pi_v^{GL})$ .

Et le but est de conjecturer des conditions nécessaires et suffisantes faisant intervenir  $\pi^{GL}$  et chaque  $\pi_v$  pour que  $\pi$  ne soit pas cuspidale et d'étayer ces conjectures en les montrant dans des cas simples et en les ramenant, en général, à des propriétés locales.

Le premier résultat est en 1.3 : on montre que si  $\pi$  n'est pas cuspidale, il existe  $(\rho, b) \in Jord(\pi)$  avec  $b > 1$  et une représentation de carré intégrable  $\sigma$  d'un groupe de rang plus petit que  $G$  mais de même type (on obtient ce groupe en enlevant des plans isotropes à la forme définissant  $G$  comme groupe d'automorphismes) tel que  $\pi$  se réalise dans l'ensemble des résidus de séries d'Eisenstein :

$$\left( (s - (b - 1)/2)E(\rho | \cdot|^s \times \sigma, f_s) \right)_{s=(b-1)/2} \quad (1)$$

où on a montré en plus que ces séries d'Eisenstein n'ont de pôle que d'ordre au plus 1 le long de l'hyperplan  $s = (b - 1)/2$  et où  $\sigma$  est dans le paquet d'Arthur associé à la représentation  $\pi^{GL, \rho, b} := Speh(\rho, b - 2) \times_{(\rho', b') \in Jord(\pi); (\rho', b') \neq (\rho, b)} Speh(\rho', b')$  ; ainsi  $\pi^{GL, \rho, b}$  est la représentation associée à  $\sigma$  ; on peut donc aussi définir les paquets locaux associés en toute place  $v$  à cette représentation. On note  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho, b}(\pi_v^{GL})$  l'ensemble des couples de représentations irréductibles  $(\pi'_v, \sigma'_v)$  tel que  $\pi'_v$  est dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL}$ ,  $\sigma'_v$  est dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL, \rho, b}$  et  $\pi'_v$  est un quotient de l'induite  $\rho_{i,v} | \cdot |^{(b-1)/2} \times \sigma'_v$ .

Le point est donc de savoir quand une telle série d'Eisenstein a réellement un pôle. Et la conjecture est que les 2 conditions ci-dessous doivent être satisfaites :

**condition globale** pour tout  $(\rho', b') \in Jord(\pi)$  tel que  $b' = b - 1$ ,  $L(\rho \times \rho', 1/2) \neq 0$  ;

**conditions locales** pour toute place  $v$ ,  $\pi_v$  est dans l'image de la première projection de  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho, b}(\pi_v^{GL})$ .

Que ces 2 conditions soient nécessaires est certainement attendu mais n'est pas simple à démontrer ; on ne le fait ici que dans des cas particuliers. Le point est de montrer que les opérateurs d'entrelacements normalisés sont holomorphes là où on doit les calculer. Dès que l'on a cela, les conditions deviennent nécessaires (cf. remarque dans 4.4 et 3.7). On espère réussir à prouver l'holomorphie de ces opérateurs dans un travail ultérieur aux places finies, cela entraînera la nécessité de ces conditions globales pour les groupes unitaires et les représentations ayant de la cohomologie.

La normalisation des opérateurs d'entrelacement ne dépend que de  $\pi^{GL}$  et non de  $\pi$  ; ce n'est donc une normalisation à la Langlands-Shahidi que pour certaines représentations. En particulier on s'attend à ce que certains de ces opérateurs d'entrelacement normalisés puissent être identiquement nuls (cf. 4.5). Pour que les conditions soient suffisantes, il faut donc aussi que les opérateurs d'entrelacement normalisés locaux ne donnent pas de zéro. On a quand même la chance qu'il nous suffit d'avoir une normalisation à un facteur holomorphe inversible près ce qui évite des problèmes de signes et de facteur epsilon.

Décrire l'image des opérateurs d'entrelacement normalisés est la difficulté majeure ; la conjecture est écrite en 4.3. La première difficulté est qu'il n'est pas clair que l'opérateur d'entrelacement standard

$$|\rho|^s \times \sigma \rightarrow |\rho|^{-s} \times \sigma$$

est l'un des opérateurs d'entrelacement contribuant aux pôles de la série d'Eisenstein en  $s = (b-1)/2$  ; les pôles pourraient ne venir que des autres opérateurs d'entrelacement qui contribuent aux termes constant quand  $\sigma$  n'est pas cuspidale. En fait je conjecture que ceci est vrai. Admettons-le, on voit alors qu'en toute place  $v$ ,  $\pi_v$  sera dans l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé associé, ce qui est une condition plus forte que d'être simplement dans l'image de la première projection définie sur  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  ; on définit donc aussi  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  comme l'ensemble des éléments  $(\pi'_v, \sigma'_v)$  de  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  tels que  $\pi'_v$  est dans l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé

$$|\rho_v|^{(b-1)/2} \times \sigma'_v \rightarrow |\rho_v|^{-(b-1)/2} \times \sigma'_v.$$

On conjecture donc que  $\mathcal{C}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  et  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  ont même image suivant la première projection. De plus  $\sigma_v$  est une composante locale de la forme automorphe de carré intégrable  $\sigma$  ; Arthur a suggéré qu'un caractère d'un groupe fini est associé à chaque  $\sigma_v$  et que ces caractères locaux vérifient une condition globale. Quand on regarde l'ensemble des couples  $(\pi'_v, \sigma'_v) \in \mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  tels que  $\pi'_v \simeq \pi_v$ , il faut que l'on puisse choisir un  $\sigma_v$  tel que la collection des  $\sigma_v$  satisfait à la condition globale d'Arthur. J'ai l'impression que  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  est un graphe et qu'il n'y a donc aucun choix et que la condition d'Arthur doit être automatiquement réalisée. C'est sans doute difficile à démontrer, j'ai donc décrit en 4.1 un sous-ensemble,  $\mathcal{C}_{parametrisation}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  formé de couples  $(\pi'_v, \sigma'_v)$  où  $\pi'_v$  est dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL}$  et  $\pi'_v$  dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL}$  à l'aide de paramètres explicite sur lesquels je sais calculer le caractère d'Arthur de chacune des représentations. Le point est donc de démontrer que l'ensemble ainsi décrit est inclus dans  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  et que l'on ne perd rien quand on considère l'image sous la première projection. On résume ainsi les conjectures locales :

**conjectures locales** en toute place  $v$ , on a les inclusions

$$\mathcal{C}_{quotient}^{\rho,b}(\pi_v^{GL}) \supset \mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho,b}(\pi_v^{GL}) \supset \mathcal{C}_{parametrisation}^{\rho,b}(\pi_v^{GL}) \quad (2)$$

et sous la première projection, ces 3 ensembles ont même image.

Avec cette conjecture, il est assez facile de démontrer que les conditions écrites ci-dessus sont aussi suffisantes pour que l'on puisse trouver  $\sigma$  tel que  $\pi$  soit un sous-module de la représentation résiduelle (1). Sous la conjecture forte que les 3 ensembles écrits en (2) coïncident, on a même que (1) est une représentation irréductible.

Dans ce travail, on démontre la conjecture dans le cas simple (suggéré par M. Harris) où  $G$  est un groupe unitaire,  $\pi_v$  est sphérique en toute place finie  $v$  non scindée dans l'extension  $k'$  de  $k$  et où

$\pi_v$  a de la cohomologie en toute place archimédienne  $v$  ; dans ce cas, il n’y a aucune condition aux places finies. Aux places archimédiennes, la condition que  $\pi_v$  est dans l’image de la première projection définie sur  $\mathcal{C}^{\rho,b}(\pi_v^{GL})$  se voit sur les paramètres de Langlands de  $\pi_v$  et elle s’exprime en disant que la représentation  $\pi_v$  s’obtient par induction cohomologique à partir d’un sous-groupe de Levi de  $G(\mathbb{C})$  défini sur  $\mathbb{R}$  et ayant une forme réelle suffisamment non compacte (cf. 3.1 et les paragraphes suivants) ; il est facile de montrer que pour un tel  $\pi_v$  il existe un unique  $\sigma_v$  tel que  $(\pi_v, \sigma_v) \in \mathcal{C}_{quotient}^{\rho_i, b_i}(\pi_v^{GL})$  et que ce couple est aussi dans  $(\pi_v, \sigma_v) \in \mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_i, b_i}(\pi_v^{GL})$ .

Ce travail commence par quelques généralités sur les termes constants des formes automorphes de carré intégrable et sur les séries d’Eisenstein qui peuvent donner par résidu des formes automorphes de carré intégrable. Ce ne sont pas des résultats vraiment nouveaux, les idées viennent de Langlands [19] mais on les interprète en utilisant le yoga d’Arthur. Puis on démontre le cas particulier où l’on sait donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\pi$  ne soit pas cuspidale (comme expliquée ci-dessus) puis on formule la conjecture générale.

Il faut redire ici qu’étudier en général les pôles des séries d’Eisenstein me semble vraiment difficile et que les réductions faites ici sont rendues possibles par les travaux d’Arthur parceque l’on ne s’intéresse qu’aux résidus de séries d’Eisenstein dont on sait au départ qu’ils sont de carré intégrable.

On s’est limité, dans la 2e partie du travail, au cas des représentations ayant de la cohomologie à l’infini, cette hypothèse apporte 2 simplifications ; l’une n’est pas sérieuse elle assure que le caractère infinitésimal est régulier et limite donc les séries d’Eisenstein pouvant intervenir. Toutefois en 1.3, on a expliqué ce qu’il faut ajouter comme résidu de séries d’Eisenstein pour traiter le cas général et il n’y a pas d’idées nouvelles à ajouter, les conjectures locales aux places finies ne voient pas cette hypothèse. Par contre aux places archimédiennes, l’hypothèse est réellement simplificatrice ; cette hypothèse de cohomologie donne une connaissance explicite des représentations et donne des résultats très simples. Je ne sais pas du tout quelle est la situation générale. Dans ce travail, on a fait une autre simplification, on a été jusqu’à supposer que les représentations cuspidales unitaires des groupes linéaires vérifient la conjecture de Ramanujan. Ce n’est absolument pas important pour ce que l’on fait ici, cela complique juste la description des paquets.

Je remercie très chaleureusement les 2 référés pour leurs relectures constructives et la liste de leurs corrections.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralité sur les représentations de carré intégrable et les séries d’Eisenstein</b>	<b>6</b>
1.1	Rappel de la correspondance d’Arthur Langlands . . . . .	7
1.2	Ordre des pôles des séries d’Eisenstein . . . . .	8
1.2.1	Termes constants d’une forme automorphe de carré intégrable . . . . .	8
1.2.2	Propriétés de certains résidus de séries d’Eisenstein . . . . .	11
1.2.3	Pôles d’ordre 1 . . . . .	13
1.3	Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Normalisation des opérateurs d’entrelacement ou encore, contribution des places sphériques.</b>	<b>16</b>
2.1	Normalisation aux places finies . . . . .	17
2.1.1	Remarques et exemples . . . . .	19
2.2	Le cas des places archimédiennes . . . . .	19
2.3	Normalisation générale . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Holomorphie des opérateurs d’entrelacements normalisés</b>	<b>21</b>
3.1	Le cas des représentations des groupes unitaires ayant de la cohomologie. . . . .	21

3.2	Opérateurs d'entrelacements et représentations cohomologiques . . . . .	25
3.3	Opérateurs d'entrelacements normalisés et représentations cohomologiques . . . . .	26
3.4	Le cas des places scindées pour les groupes unitaires . . . . .	27
3.5	Opérateurs d'entrelacement normalisés pour les représentations dans le paquet de Langlands inclus dans le paquet d'Arthur. . . . .	28
3.5.1	Holomorphie aux places finies . . . . .	28
3.5.2	Le cas des places archimédiennes . . . . .	29
3.5.3	Image des opérateurs d'entrelacement normalisés . . . . .	30
3.6	Les autres opérateurs d'entrelacements dans le cas non archimédien . . . . .	32
3.7	Un théorème simple . . . . .	34
3.8	Une variante du théorème simple pour les groupes unitaires . . . . .	37
<b>4</b>	<b>La conjecture précise</b>	<b>37</b>
4.1	Paramétrisation locale aux places finies . . . . .	38
4.2	La conjecture locale . . . . .	40
4.3	Conjecture sur les opérateurs d'entrelacement . . . . .	41
4.4	Conjecture . . . . .	41
4.5	Commentaires . . . . .	44
4.6	Quelques cas particuliers . . . . .	44

**Notations :**

A la suite de Franke, définissons  $\mathcal{A}_{log}$  comme l'ensemble des formes automorphes pour le groupe fixé (que ce soit  $G$  ou  $GL(n^*)$ ) dont les exposants sont dans la fermeture de la chambre de Weyl obtuse négative. Les représentations  $\times_{(\rho,b) \in Jord} Speh(\rho, b)$  pour un ensemble  $Jord$  comme ci-dessus sont des exemples importants de représentations se réalisant dans  $\mathcal{A}_{log}$  mais pour avoir une description complète il faut aussi tenir compte des dérivés des séries d'Eisenstein.

$\rho$  et toutes les variantes  $\rho_i, \rho'$ , est une représentation cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire,  $GL(d_\rho, \mathbb{A})$ , ce qui définit  $d_\rho$ .

Notations pour les induites : Zelevinsky a utilisé le signe  $\times$  pour écrire aisément les induites dans les groupes linéaires. Ceci suppose évidemment que la connaissance du Levi entraîne celle du parabolique. On a donc fixé un parabolique standard. On utilise la même notation pour les induites dans les groupes classiques ; pour les groupes que l'on considère le Levi détermine aussi un parabolique standard (c'est un des intérêts des groupes orthogonaux pairs sur les groupes spéciaux orthogonaux). Toutefois, la notation pose un problème quand le sous-groupe de Levi n'a qu'un facteur, un groupe linéaire ; dans ce rare cas, on reprend la notation plus standard avec  $Ind$ .

En général  $\pi$  est une représentation irréductible de carré intégrable de  $G(\mathbb{A})$  et on note  $\pi^{GL} = \times_{(\rho,b) \in Jord(\pi)} Speh(\rho, b)$  la représentation du groupe linéaire convenable qu'Arthur lui associe (cf. ci-dessous).

# 1 Généralité sur les représentations de carré intégrable et les séries d'Eisenstein

On a expliqué dans l'introduction avec les références aux papiers d'Arthur disponibles comment Arthur permet de ramener l'étude du spectre discret des groupes classiques à celui des groupes linéaires ; la meilleur référence est le dernier chapitre de [5]. Ci-dessous, on fixe les notations.

## 1.1 Rappel de la correspondance d'Arthur Langlands.

Soit  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de  $G(\mathbb{A})$ . D'après les conjectures de Langlands et d'Arthur, il existe une représentation automorphe irréductible,  $\pi^{GL}$  de  $GL(n^*, \mathbb{A})$  uniquement déterminée par les deux propriétés suivantes :

$\pi^{GL}$  est une induite de représentations de carré intégrable ;

pour  $S$  un ensemble fini de places de  $k$  suffisamment grand contenant toutes les places où  $\pi$  a de la ramification et pour toute place  $v$  de  $k$  non dans  $S$ , les représentations  $\pi_v$  et  $\pi_v^{GL}$  se correspondent par le correspondance de Langlands sphérique.

Pour  $\rho$  une représentation cuspidale irréductible d'un groupe  $GL(d, \mathbb{A})$  et pour  $b \in \mathbb{N}$ , on note  $Speh(\rho, b)$  la représentation de carré intégrable de  $GL(ad, \mathbb{A})$  obtenue comme résidu des séries d'Eisenstein construites à partir de l'induite  $\rho ||^{(b-1)/2} \times \cdots \times \rho ||^{-(b-1)/2}$ , où  $||$  est la valeur absolue adélique. Cela s'écrit tout à fait explicitement comme la représentation de  $GL(d, \mathbb{A})$  dans l'ensemble des fonctions

$$\left( \left( \times_{i \in [1, b]} (s_i - s_{i+1}) E(f_{s_1, \dots, s_b}, g) \right)_{s_i = s_{i+1} + 1, s_1 = (b-1)/2} \right),$$

où  $f_{s_1, \dots, s_b}$  parcourt l'ensemble des fonctions dans l'induite automorphe  $\rho ||^{s_1} \times \cdots \times \rho ||^{s_b}$ . On connaît les représentations de carré intégrable des groupes linéaires, elles sont de la forme  $Speh(\rho, b)$  pour  $\rho, b$  convenable et donc  $\pi^{GL}$  est une induite de telles représentations  $Speh(\rho, b)$ , c'est-à-dire qu'il existe un ensemble,  $\mathcal{E}$  de couples  $(\rho, b)$  comme ci-dessus tels que

$$\pi^{GL} \simeq \times_{(\rho, b) \in \mathcal{E}} Speh(\rho, b).$$

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est uniquement déterminé avec les propriétés ci-dessus grâce à la multiplicité 1 forte qui vaut dans  $\mathcal{A}_{log}$ . On aura besoin d'une unicité plus forte qui vient de la classification des formes automorphes isobariques de [16]. Supposons que  $\mathcal{E}$  vérifie les propriétés ci-dessus, d'où  $\pi^{GL}$  et qu'il existe un ensemble fini  $\mathcal{F}$  de représentation cuspidales (non unitaires ici) de groupes linéaire tel que l'induite automorphe  $\times_{\sigma \in \mathcal{F}} \sigma$  a en presque toute place comme sous-quotient sphérique une représentation isomorphe à  $\pi_v^{GL}$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{F}$  est le support cuspidale de  $\pi^{GL}$  et s'identifie donc en tant qu'ensemble avec multiplicité à  $\cup_{(\rho, b) \in \mathcal{E}} \cup_{t \in [-(b-1)/2, (b-1)/2]} \rho ||^t$ .

**Définition.** On note alors l'ensemble  $\mathcal{E}$  attaché uniquement à  $\pi$  ci-dessus,  $Jord(\pi^{GL})$ .

La functorialité de Langlands-Arthur donne aussi des renseignements aux places ramifiées. En effet soit  $v$  une place de  $k$ , la functorialité dit que  $\pi_v$  est un transfert d'une combinaison linéaire finie d'un ensemble de représentation irréductible de  $G(k_v)$ ; cet ensemble de représentation est uniquement déterminé : ceci est une propriété propre aux transferts que l'on considère et est dû au fait que tout élément semi-simple suffisamment régulier de  $G(k_v)$  engendre une classe de conjugaison stable qui est dans l'image de la norme car la norme se décrit en comparant les valeurs propres des matrices sur une extension algébriquement close de  $k_v$  (cf. par exemple [41]). Plusieurs choix sont possibles, ce qui influe sur le transfert des fonctions et donc sur les coefficients de la combinaison linéaire qui se transfère mais n'a pas d'influence sur le paquet de représentations qui intervient. On remarque que pour avoir la définition du paquet, on n'a absolument pas besoin d'avoir de formule de multiplicité, c'est une simple comparaison de la formule des traces stables pour  $G$  avec la formule des traces tordus pour le  $GL$  correspondant. En général, il faut le lemme fondamental pondéré, mais quand on met des conditions d'ellipticité en au moins 2 places, on peut le faire uniquement avec les lemmes fondamentaux, maintenant annoncés par Ngo [34]; c'est le cas des représentations ayant de la cohomologie (avec au moins 2 places archimédiennes) qui sont accessibles plus facilement que le cas général (entre autre grâce aux travaux de Labesse).

**Définition des paquets locaux.** Soit  $v$  une place de  $k$ , on appelle paquet d'Arthur associé à  $\pi_v^{GL}$ , l'ensemble défini ci-dessus des représentations. En particulier dans la situation de départ, la composante  $\pi_v$  de  $\pi$  appartient au paquet d'Arthur associé à  $\pi_v^{GL}$ .

Une propriété attendue de  $Jord(\pi^{GL})$  est qu'il soit un ensemble sans multiplicité,  $\theta_G$  discret comme expliqué dans l'introduction et que l'on reprend ci-dessous ; ceci est annoncé par Arthur et est une propriété difficile. Comme  $G$  est fixé, on notera souvent  $\theta$  au lieu de  $\theta_G$ .

**Définition d'un ensemble  $\theta$  discret.** Un ensemble  $\mathcal{E}$  formé de couples  $(\rho, b)$  comme ci-dessus, ensemble sans multiplicité et qui vérifie que pour tout  $(\rho, b) \in \mathcal{E}$   $\rho$  est  $\theta$ -invariant et  $b$  est pair exactement quand la fonction  $L(\rho, r_G, s)$  a un pôle en  $s = 1$  ( $r_G$  est défini dans l'introduction). Tous les ensembles  $\theta$ -discret ne donne pas lieu a des représentations de carré intégrable mais à toute représentation de carré intégrable est associé un ensemble  $\theta$  discret (cf. l'introduction).

Dans cet article nous ne nous intéresserons qu'à des représentations  $\pi$  pour lesquelles on sait définir  $\pi^{GL}$  et pour lesquelles on sait que  $Jord(\pi^{GL})$  est  $\theta$ -discret. Cette hypothèse n'est pas vide. On ne donnera de théorème que dans le cas où  $\pi$  a de la cohomologie à l'infini ; cette hypothèse d'existence de cohomologie à l'infini est extrêmement forte (ce qui fait sa popularité) car elle impose que le caractère infinitésimal des composantes de  $\pi$  aux places archimédiennes soit entier et régulier. Or ce caractère infinitésimal se calcule à partir du caractère infinitésimal des composantes à l'infini de  $\pi^{GL}$  ; ce caractère infinitésimal aussi doit être régulier. Le caractère infinitésimal de  $\pi^{GL}$  en toute place  $v$  archimédienne est celui de l'induite  $\times_{(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})} \times_{k \in [(b-1)/2, -(b-1)/2]} |\rho_v|^k$  ; comme  $\rho$  impose la parité de  $b$ , la régularité du caractère infinitésimal de  $\pi^{GL}$  entraîne donc que pour  $(\rho, b), (\rho', b') \in Jord(\pi^{GL})$ ,  $\rho \not\sim \rho'$ .

## 1.2 Ordre des pôles des séries d'Eisenstein

Langlands avait démontré (cf [32] IV.1.11) que les pôles des séries d'Eisenstein formées à partir d'une représentation cuspidale en des points de la chambre de Weyl positive ouverte sont d'ordre 1 exactement. On veut montrer dans quel cas, on peut enlever et l'hypothèse de cuspidalité et l'hypothèse de positivité de façon à obtenir les représentations de carré intégrable non cuspidales comme résidus de séries d'Eisenstein le long d'hyperplans où le pôle est d'ordre 1 exactement.

### 1.2.1 Termes constants d'une forme automorphe de carré intégrable

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de carré intégrable comme dans 1.1 ; on suppose que  $\pi$  n'est pas cuspidale. Soit  $P$  un parabolique maximal tel que  $\pi_P$  ne soit pas nul ; on écrit  $P = GL(d') \times G'$  où  $G'$  est un groupe de même type que  $G$ . On écrit les termes constants des éléments de  $\pi$  suivant le radical unipotent de  $P$  et on les projette sur l'ensemble des fonctions cuspidales du facteur  $GL(d')$  de  $P'$  ; on note  $\pi_{P, d' - cusp}$  ces projections (cf. par exemple [32] I.3.4). Comme l'action de l'algèbre de Hecke de  $G$  est semi-simple dans l'ensemble des formes automorphes de carré intégrable, ces termes constants qui, vus comme des fonctions sur le groupe  $M_P(\mathbb{A})/M_P^1$  (notations usuelles cf. [32] 1.3), sont des fonctions finies, sont en fait une combinaison linéaire des fonctions propres pour l'action de ce groupe. On décompose donc ces termes constants suivant les représentations cuspidales de  $GL(d')$  (cuspidales car  $d'$  est supposé minimal). D'où formellement (cf. [32] I.3.1 et I.3.2) :

$\pi_{P, d' - cusp} = \bigoplus_{(\rho', s')} |\rho'|^{-s'} \otimes \pi[\rho', s']$ , où  $\rho'$  parcourt l'ensemble des représentations cuspidales unitaires de  $GL(d')$  et  $s' \in \mathbb{R}$  ; on ne considère que des exposants réels car on autorise toutes les représentations cuspidales unitaires de  $GL(d')$  (cf. [32] I.3.2). On sait que nécessairement n'interviennent que les réels  $s' > 0$  (attention on a mis le  $-$  devant  $s'$ ) car  $\pi$  est de carré intégrable (cf. par exemple [32] I.4.11).

**Proposition** *Supposons que  $\pi[\rho', s'] \neq 0$ , alors  $s' > 0$  et  $\pi[\rho', s']$  est dans  $\mathcal{A}_{log}$  que cette représentation soit irréductible ou non. De plus  $(\rho', 2s' + 1) \in Jord(\pi^{GL})$  et  $\pi[\rho', s']$  est de carré intégrable si et seulement si  $(\rho', 2s' - 1) \notin Jord(\pi^{GL})$  (ceci est toujours vérifié si  $s' = 1/2$ ).*

On montre d'abord que  $\pi[\rho', s']$  est dans  $\mathcal{A}_{log}$  en raisonnant par l'absurde. On utilise les idées de Franke [10]; si  $G$  était  $O(2n)$ , on travaille avec  $SO(2n)$  pour avoir un groupe connexe mais en tenant compte du fait que l'automorphisme extérieur de  $SO(2n)$  agit de façon naturelle. On considère les termes constants de  $\pi$  suivant le radical unipotent de  $P$  ce sont donc des fonctions sur un groupe du type  $GL(d_{\rho'}, \mathbb{A}) \times G'(\mathbb{A})$  où  $G'$  est convenable de même type que  $G$ . On les regarde comme formes automorphe pour  $G'$  et on veut démontrer que leurs exposants sont dans la chambre de Weyl obtuse négative fermée pour  $G'$ . S'il n'en est pas ainsi, il existe un exposant maximum qui par projection convexe (comme l'a fait Langlands dans le cas local et Franke dans le cas global) fournit un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $G'$  de Levi noté  $M'$ , un exposant  $\mu'$  dans la chambre de Weyl strictement positive relative à ce parabolique et une représentation  $\sigma_{log}$  dans  $\mathcal{A}_{log}(M')$  tel que cet exposant maximum soit l'exposant maximum de la série d'Eisenstein construite avec  $\mu'$  et  $\sigma_{log}$ , c'est-à-dire que le terme constant d'un élément de  $\pi$  le long du parabolique de Levi  $GL(d_{\rho'}) \times M'$  contribue à  $\rho' ||^{s'} \otimes (\mu' \otimes \sigma_{log})$ . Le résultat le plus difficile de Franke est de décrire  $\mathcal{A}_{log}$ ; le résultat dit que cet espace s'identifie via les séries d'Eisenstein en l'axe unitaire (donc holomorphes) à la somme des spectres discrets des sous-groupes de Levi,  $L$ , de  $M$ , tensorisé par des fonctions polynômes (pour prendre en compte les dérivées de séries d'Eisenstein) sur le tore  $A_L$ ; ici j'oublie le noyau, pour avoir une bijection, il faut se restreindre aux éléments invariants sous l'action d'un groupe de Weyl convenable. On peut donc encore trouver un Levi  $L$  de  $M'$  et une représentation de carré intégrable  $\sigma$  de  $L$  telle que  $\sigma_{log}$  soit induite de  $\sigma$ . On écrit  $L = \times_{j \in [1, k]} GL(d_j) \times G''$  où  $G''$  est encore de même type que  $G$  et  $\sigma$  est alors de la forme  $\times_{j \in [1, k]} Speh(\rho_j, b_j) \times \pi_0$ , où  $\pi_0$  est de carré intégrable pour un groupe de même type que  $G$  mais de rang plus petit. On écrit  $\mu'$  sous la forme d'une collection de  $k$  réels  $\mu_j$  pour  $j \in [1, k]$  et la positivité se traduit par  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k \geq 0$ ; on n'a plus qu'une positivité au sens large car on est passé de  $\sigma_{log}$  à  $\sigma$ . Avec ces constructions, on sait que  $\pi$  a comme exposant pour un parabolique convenable

$$\rho' ||^{-s'} \otimes_{j \in [1, k]} \otimes_{t \in [-(b_j-1)/2, (b_j-1)/2]} \rho_j ||^{\mu_j+t} \otimes \pi_0. \quad (1)$$

On construit  $\pi_0^{GL}$  (dont on a admis l'existence); la représentation induite automorphe pour le groupe linéaire convenable

$$\rho' ||^{-s'} \times_{j \in [1, k]} \times_{t \in [-(b_j-1)/2, (b_j-1)/2]} \rho_j ||^{\mu_j+t} \times \pi_0^{GL} \times \theta_G(\rho') ||^{s'} \times_{t \in [-(b_j-1)/2, (b_j-1)/2]} \theta_G(\rho_j) ||^{-\mu_j-t} \quad (2)$$

n'est évidemment pas irréductible mais a en presque toute place finie le même sous-quotient sphérique que la représentation  $\pi^{GL}$ . On en déduit une égalité du support cuspidal (cf 1.1); on peut donc oublier les  $\theta_G$  dans (2) et savoir que les  $\mu_j$  sont des demi-entiers. Le support cuspidal de  $\pi^{GL}$  est très particulier, c'est une union de segments centrés en 0 en effet c'est l'union des segments  $\rho ||^{\ell}$ ;  $\ell \in [-(b-1)/2, (b-1)/2]$  pour  $(\rho, b)$  parcourant  $Jord(\pi^{GL})$ . Le support cuspidal de (2) est plus compliqué puisque c'est l'union du support cuspidal de  $\pi_0^{GL}$  qui a la propriété qui vient d'être décrite et de couples de segments décalés par rapport à 0 de la forme pour tout  $j \in [1, k]$ ,

$$\rho_j ||^{\ell+\mu_j}, \rho_j ||^{-\ell-\mu_j}; \ell \in [-(b_j-1)/2, (b_j-1)/2] \quad (3)$$

sans oublier  $\rho' ||^{s'} \cup \rho' ||^{-s'}$ .

L'ensemble (3) pour  $j$  fixé est soit l'union de 2 segments symétriques par rapport à 0 dont aucun ne contient 0, c'est le cas où  $\mu_j - (b_j - 1)/2 > 0$  soit est l'union des 2 segments centrés en 0,

$$[-\mu_j - (b_j - 1)/2, \mu_j + (b_j - 1)/2] \cup [\mu_j - (b_j - 1)/2, -\mu_j + (b_j - 1)/2]. \quad (4)$$

On récrit donc le support cuspidal de (2) comme l'union des segments centrés en 0 correspondant au support cuspidal de  $\pi_0^{GL}$ , l'union des segments de la forme (4) pour  $j \in [1, k]$  tel que  $\mu_j < (b_j - 1)/2$ , l'union des 2 segments réduits à un élément  $\rho' ||^{s'}, \rho' ||^{-s'}$  et les segments  $\rho_j ||^\ell$ ;  $\ell \in [\mu_j - (b_j - 1)/2, \mu_j + (b_j - 1)/2]$  ne contenant que des éléments positifs et les segments symétriques.

Supposons qu'il n'existe pas  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $\rho' \simeq \rho$  et  $s' = (b - 1)/2$ . D'après ce que l'on vient de voir, il existe  $j \in [1, k]$  tel que  $\mu_j - (b_j - 1)/2 = s' + 1$ ; en terme concret comme  $\rho' ||^{s'}$  n'est pas une extrémité d'un segment de  $\text{Jord}(\pi^{GL})$ , il doit se "raccrocher" à un début de segment non centré en 0. En particulier cela force  $\mu_j > 0$  et, par positivité de l'exposant, pour tout  $j' \leq j$ ,  $\mu_{j'} > 0$ . On vérifie alors que l'exposant (1) n'est pas dans la chambre de Weyl obtuse négative fermée; en effet cette condition de négativité entraîne que la somme ordinaire des parties réels des  $t$  premiers exposants (pour tout  $t$ ) doit être négative ou nulle. Or la somme des exposants pour un "bloc" correspondant à  $j'$  pour  $j'$  tel que  $\mu_{j'} > 0$  est certainement positive, on ne tient donc pas compte de ces blocs et on regarde simplement la somme de  $-s'$  avec le premier exposant du facteur correspondant à  $j$ , c'est-à-dire  $\mu_j - (b_j - 1)/2$  et cela vaut 1 ce qui donne une contradiction. Donc on vient de démontrer l'une des assertions de l'énoncé, à savoir qu'il existe  $(\rho, b)$  tel que  $\rho' \simeq \rho$  et  $b = 2s' + 1$ .

On montre maintenant que  $\mu_j = 0$  pour tout  $j$ ; on suppose donc que  $\mu_1 > 0$  et on considère le sous-groupe parabolique de  $G$  de Levi  $GL(d_{\rho'} + b_1 d_{\rho_1}) \times G_1$  où  $G_1$  est de même type que  $G$ . Grâce à (1), on sait qu'il existe des formes automorphes dans l'espace de  $\pi$  tel que le terme constant le long du radical unipotent du sous-groupe parabolique de ce Levi ont des exposants pour l'action de  $GL(d_{\rho'} + b_1 d_{\rho_1})$  dans l'ensemble  $\rho' ||^{-s'} \cup_{\ell \in [-(b_1-1)/2, (b_1-1)/2]} \rho_1 ||^{\ell + \mu_1}$ . Supposons d'abord que  $\rho' \neq \rho_1$ ; il n'y a pas de représentation de carré intégrable ayant ce support cuspidale et il n'y a pas non plus de représentation dans  $\mathcal{A}_{log}$  même modulo le centre car  $\mu_1 > 0$  et  $-s' < 0$ . On refait les constructions de Franke et on trouve un exposant qui n'a pas la négativité nécessaire pour  $\pi$ . Supposons maintenant que  $\rho' \simeq \rho_1$ ; il peut alors exister une représentation de carré intégrable ayant le même support cuspidal mais pas de représentation dans  $\mathcal{A}_{log}$  qui ne soit pas de carré intégrable. En effet dans le premier cas il faut que le support cuspidal forme un segment et dans le 2e il faut qu'il soit une union de segment de même centre ce qui est impossible. Par contre, on est dans le premier cas exactement quand  $-s' = -(b_1 - 1)/2 + \mu_1$ . Dans ce cas, on calcule,

$$-s' + \sum_{\ell \in [-(b_1-1)/2, (b_1-1)/2]} (\ell + \mu_1) = -s' + b_1 \mu_1 = -(b_1 - 1)/2 + \mu_1(1 + b_1).$$

Or on sait que  $\mu_1$  est un demi-entier (cf. ci-dessus) donc cette somme est supérieur ou égal à  $-(b_1 - 1)/2 + (b_1 + 1)/2 = 1$ . C'est une contradiction. On a donc démontré que  $\pi[\rho', s']$  est dans  $\mathcal{A}_{log}$ .

Il reste à préciser quand cette représentation, non nécessairement irréductible a priori, est de carré intégrable. Supposons d'abord qu'un sous-quotient irréductible,  $\pi_1$ , de cette représentation est de carré intégrable; on peut lui associer une représentation  $\pi_1^{GL}$ ; comme ci-dessus on vérifie que le support cuspidal de  $\pi^{GL}$  est celui de l'induite  $\rho' ||^{s'} \times \pi_1^{GL} \times \rho' ||^{-s'}$ ; on rappelle qu'il existe  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $\rho \simeq \rho'$  et  $s' = (b - 1)/2$  donc  $\text{Jord}(\pi_1^{GL})$  est l'ensemble des couples  $(\rho'', b'') \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  sauf  $(\rho, b)$  qui devient  $(\rho, b - 2)$ . Comme il n'y a pas de multiplicité dans  $\text{Jord}(\pi_1^{GL})$  puisque c'est un ensemble  $\theta$ -discret,  $(\rho, b - 2) \notin \text{Jord}(\pi^{GL})$ . Réciproquement supposons que  $\pi[\rho', s']$  a un sous-quotient irréductible dans  $\mathcal{A}_{log}$  qui n'est pas de carré intégrable; on revient à (2) ci-dessus où maintenant tous les  $\mu_j$  sont nuls. On vérifie alors que le support cuspidal de  $\pi^{GL}$  est l'union du support cuspidal de  $\pi_0^{GL}$  et des segments  $\rho_j ||^\ell$  pour  $\ell \in [-(b_j - 1)/2, (b_j - 1)/2]$  qui interviennent tous 2 fois et de  $\rho' ||^{s'} \cup \rho' ||^{-s'}$ . Comme il n'y a pas de multiplicité dans  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  nécessairement  $k = 1$  et  $\rho_1 \simeq \rho'$ ,  $b_1 = 2s' - 1$ . On a donc démontré au passage les 2 remarques ci-dessous, utiles dans la suite :

**Remarque 1** *Supposons que  $\pi[\rho', s'] \neq 0$  et que  $\pi[\rho', s']$  ne soit pas de carré intégrable. Alors  $\pi[\rho', s'] \simeq \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \pi'$ , où  $\pi'$  est une représentation de carré intégrable, a priori non*

nécessairement irréductible. De plus dans ce cas  $Jord(\pi'^{GL})$  se déduit de  $Jord(\pi^{GL})$  en enlevant les couples  $(\rho, b)$  et  $(\rho, b - 2)$  où  $\rho \simeq \rho'$ ,  $b = 2s' + 1$

**Remarque 2** Supposons que  $\pi[\rho', s'] \neq 0$  soit de carré intégrable ; alors  $Jord(\pi[\rho', s']^{GL})$  se déduit de  $Jord(\pi^{GL})$  en remplaçant  $(\rho', 2s' + 1)$  par  $(\rho', 2s' - 1)$ .

### 1.2.2 Propriétés de certains résidus de séries d'Eisenstein

**Proposition** Soit  $\pi$  une représentation irréductible de carré intégrable. Soit  $\rho$  une représentation cuspidale unitaire irréductible et soit  $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ . On suppose que les séries d'Eisenstein formées à partir de l'induite automorphe  $\rho||^s \times \pi$  pour  $s \in \mathbb{C}$  ne sont pas holomorphes en  $s = s_0$ . On note  $r$  l'ordre du pôle et  $Res_r$  la représentation engendrée par les résidus d'ordre  $r$ . Alors  $Res_r$  est une représentation dans  $\mathcal{A}_{log}$ . Elle est de carré intégrable si  $(\rho, 2s_0 + 1) \notin Jord(\pi^{GL})$ .

On étudie les pôles des séries d'Eisenstein via les pôles des termes constants . Une série d'Eisenstein à partir d'une représentation de carré intégrable est holomorphe en  $s = s_0$  si et seulement si tous ses termes constants cuspidaux le sont ; ceci est démontré par exemple en [32] 1.4.10.

Les termes constants s'obtiennent en appliquant une combinaison linéaire d'opérateurs d'entrelacement définis sur les induites de la forme  $\rho||^s \times \pi_Q$  où  $\pi_Q$  est un terme constant pour  $\pi$  le long du radical unipotent du parabolique standard  $Q$ . On peut se limiter aux  $\pi_Q$  qui engendrent des représentations cuspidales du Levi de  $Q$ . On fixe un tel  $Q$  et on écrit le sous-groupe de Levi standard de  $Q$  comme un produit de groupes linéaires  $\times_{d'' \in \mathcal{I}} GL(d'') \times G''$ , où  $d''$  parcourt un ensemble d'entiers  $\mathcal{I}$  totalement ordonné et où  $G''$  est un groupe de même type que  $G$ . Les opérateurs d'entrelacement à considérer sont de 2 types :

le type 1 : ceux qui sont associés à un entier  $d_0 \in \mathcal{I}$  et à un signe  $\zeta$  et qui correspondent à la permutation du produit

$$GL(d) \times_{d'' \in \mathcal{I}} GL(d'') \rightarrow \times_{d'' \in \mathcal{I}_{<d_0}} GL(d'') \times GL(d) \times_{d'' \in \mathcal{I}_{\geq d_0}} GL(d'')$$

qui simplement avance les éléments de  $\mathcal{I}_{<d_0}$  et qui décale donc  $GL(d)$  en appliquant l'automorphisme  $\theta$  si  $\zeta = -$  et ne touche pas aux autres éléments.

le type 2 :

$$\rho||^s \times \pi \rightarrow \rho||^{-s} \times \pi.$$

Il est clair que les résidus de l'opérateur d'entrelacement de type 2, donne des représentations à exposants dans la chambre de Weyl obtuse négative ouverte. Pour étudier ceux de type 1, c'est plus difficile à cause de la présence éventuelle de stabilisateur ; les pôles des séries d'Eisenstein sont ceux des termes constant et non ceux des opérateurs d'entrelacement, il faut regrouper les opérateurs qui donnent le même exposant.

On considère le premier élément de  $\mathcal{I}$  ; cela revient à considérer une inclusion de  $\pi$  dans une induite automorphe  $\rho' ||^{-s'} \times \pi[\rho', s']$  avec les notations de 1.2.1. Les termes constants qui nous intéressent sont alors les termes constants de  $\rho' ||^{-s'} \otimes$  les termes constants de la série d'Eisenstein associée à  $\rho ||^s \times \pi[\rho', s']$ .

Supposons d'abord que  $\pi[\rho', s']$  est de carré intégrable ; on a alors le résultat par récurrence et les exposants sont d'ailleurs dans la chambre de Weyl obtuse négative ouverte puisque les termes constants que l'on considère ont un exposant dont le premier terme est  $\rho' ||^{-s'}$ .

On suppose donc maintenant que  $\pi[\rho', s'] \simeq Sp_{eh}(\rho', 2s' - 1) \times \pi''$  avec  $\pi''$  de carré intégrable (cf. remarque 1 de 1.2.1) donc en particulier  $(\rho', 2s' - 1) \in Jord(\pi^{GL})$ . On a donc à calculer les pôles de

la série d'Eisenstein associée à l'induite automorphe

$$\rho||^s \times \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \pi''.$$

Pour étudier ces pôles, on regarde plus généralement les séries d'Eisenstein associées à l'induite  $\rho||^s \times \text{Speh}(\rho', 2s' - 1)||^{s''} \times \pi''$ , au voisinage de  $s'' = 0$ .

Mais on sait grâce par exemple à [31] (c'est sans doute plus simple ici) que les séries d'Eisenstein pour les groupes linéaires associées à  $\rho||^s \times \text{Speh}(\rho', 2s' - 1)||^{s''}$  et à  $\text{Speh}(\rho', 2s' - 1)||^{s''} \times \rho||^{-s}$  sont holomorphes pour tout  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  sauf si  $\rho \simeq \rho'$  et  $s = s' + s''$  pour la première induite et  $s = s' - s''$  pour la deuxième. Ici, si  $\theta(\rho) \simeq \rho'$  sur l'hyperplan  $s = s' + s''$ , les résidus des séries d'Eisenstein construites sur l'induite  $\rho||^s \times \text{Speh}(\rho, 2s - 1)$  forment l'unique sous-module irréductible de la représentation induite

$$\rho' ||^{-(s'-1)+s''} \times \dots \times \rho ||^{(s'-1)+s''} \times \rho' ||^{s'+s''}.$$

On note  $\langle \rho' ||^{-(s'-1)+s''} \times \dots \times \rho ||^{(s'-1)+s''} \times \rho' ||^{s'+s''} \rangle$  ce sous-module irréductible. Sur l'hyperplan  $s = s' - s''$  (quand  $\theta(\rho) \simeq \rho'$ ), les résidus pour les séries d'Eisenstein construites sur l'induite  $\text{Speh}(\rho', 2s' - 1)||^{s''} \times \rho' ||^{-s}$  engendrent l'unique sous-module irréductible de l'induite  $\rho' ||^{-s'+s''} \times \dots \times \rho' ||^{(s'-1)+s''}$ .

Les résidus qui proviennent des séries d'Eisenstein pour l'induite  $\rho||^s \times \pi''$  sont, par l'hypothèse de récurrences dans  $\mathcal{A}_{\log}$ .

On peut maintenant calculer les termes constants des séries d'Eisenstein construites avec les sections de l'induite  $\rho||^s \times \pi[\rho', s']$ . Ces résidus ont des exposants qui sont certainement inclus dans les exposants des résidus calculés sur chaque hyperplan quand on fait  $s'' = 0$ . Tous les exposants sont au moins dans la chambre de Weyl obtuse négative fermé sauf ceux qui viennent des résidus sur les hyperplans  $s = s' \pm s''$  quand  $\rho \simeq \rho'$  où il faut tenir compte des exposants de l'induite  $\langle \rho' ||^{-(s'-1)} \times \dots \times \rho' ||^{(s'-1)} \times \rho' ||^{s'} \rangle \times \pi[\rho', s']$  (puisque l'on considère toute l'induite, les 2 hyperplans donnent la même induite en tenant compte de l'isomorphisme nécessaire  $\rho' \simeq \theta(\rho')$ ). Mais les termes constants que l'on cherche ici pour démontrer la proposition sont de la forme  $\rho' ||^{-s'} \otimes$  un terme constant comme ci-dessus. La présence de  $\rho' ||^{-s'}$  assure que ces exposants sont au moins dans la fermeture de la chambre de Weyl obtuse négative. On a donc démontré l'assertion de l'énoncé.

**Remarque 1.** On reprend les notations de la proposition précédentes; la non holomorphie des séries d'Eisenstein en  $s = s_0$  nécessite que  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  si  $s_0 > 1/2$  et si  $s_0 = 1/2$  que  $L(\rho, r_G, s)$  ait un pôle en  $s = 1$ . On suppose que  $\text{Res}_r$  est de carré intégrable. Alors  $\text{Jord}(\text{Res}_r^{GL})$  s'obtient en changeant  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  en  $(\rho, 2s_0 + 1)$ .

Dans la preuve ci-dessus, on a vu que  $\text{Res}_r$  est de carré intégrable sauf éventuellement dans un cas le cas où il existe  $(\rho', 2s' - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $s_0 = s'$ ,  $\rho \simeq \rho'$  avec les notations ci-dessus. Dans ce cas particulier, on a immédiatement la première partie de la remarque. Sinon, on sait que  $\text{Res}_r$  est de carré intégrable et il est facile de vérifier que le support cuspidal de  $\text{Res}_s^{GL}$  est celui de  $\pi^{GL}$  auquel s'ajoute  $(\rho||^{s_0}, \rho||^{-s_0})$ . Comme  $s_0 > 0$ , la forme très particulière du support cuspidal (cf. 1.1) donne toute la remarque.

**Remarque 2.** Avec les notations de la proposition précédente, on suppose que  $r \geq 2$  et que  $\text{Res}_r$  n'est pas identiquement nul. Alors  $\text{Res}_r$  est de carré intégrable

On reprend la démonstration de la proposition; l'existence de résidus éventuellement dans  $\mathcal{A}_{\log}$  sans être de carré intégrable se produit dans le cas où  $\pi[\rho', s'] \simeq \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \pi''$  et où  $\rho \simeq \rho'$ ,  $s_0 = s'$ . On sait alors que  $(\rho', 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  avec multiplicité 1 et donc qu'il ne peut être aussi dans  $\text{Jord}(\pi''^{GL})$ . Ainsi la série d'Eisenstein formée avec l'induite  $\rho||^s \times \pi''$  est holomorphe en  $s = s_0$ . Pour avoir un pôle d'ordre au moins 2, il faut donc que se cumule les pôles de l'opérateur

$\rho||^s \times \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \rightarrow \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \rho||^s$  avec les pôles de l'opérateur  $\text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \rho||^{-s} \rightarrow \rho||^{-s} \times \text{Speh}(\rho', 2s' - 1)$ . Mais alors les exposants correspondants sont obtenus en appliquant un élément du groupe de Weyl à l'ensemble  $\rho||^{-s}, \rho||^{-s+1}, \dots, \rho||^{s-1} \cup$  un exposant de  $\pi'$ , élément du groupe de Weyl qui vérifie avec des notations que l'on espère évidente  $w(i \pm j) > 0$  pour  $i \leq j$ ,  $i, j \in [1, 2s]$  quand on identifie les racines positives à des  $i \pm j$  pour  $i \leq j$ . Un tel exposant est dans la chambre de Weyl obtuse négative ouverte. On a donc la première assertion cherchée.

**Remarque 3.** *Supposons que le caractère infinitésimal de  $\rho||^{s_0} \times \pi$  est régulier alors dans la proposition seul le cas des résidus de carré intégrable peut se produire.*

On a vu que l'on obtient des résidus non de carré intégrable uniquement dans le cas où  $\pi[\rho', s'] \simeq \text{Speh}(\rho', 2s' - 1) \times \pi''$  et où  $\rho \simeq \rho'$  et  $s_0 = s'$ . Mais dans ce cas le caractère infinitésimal de l'induite  $\rho||^{s_0} \times \text{Speh}(\rho, 2s_0 - 1) \times \pi'$  n'est pas régulier or c'est aussi celui des résidus.

### 1.2.3 Pôles d'ordre 1

**Proposition 1.** *Soit encore  $\rho, s_0, \pi$  comme dans 1.2.2. Alors les séries d'Eisenstein associées à l'induite automorphe  $\rho||^s \times \pi$  ont un pôle d'ordre 1 au plus.*

Si  $\pi$  est cuspidale cette assertion est démontrée par Langlands (cf par exemple [32] IV. 1.11). On suppose donc que  $\pi$  n'est pas cuspidale.

On remarque d'abord que l'existence même d'un résidu assure que  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ . On démontre cette proposition en 2 temps. D'abord on considère le cas où  $(\rho, 2s_0 + 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ . On raisonne alors par l'absurde : on suppose que le pôle est d'ordre au moins 2, on sait alors que l'on peut produire des représentations  $\text{Res}_r$  de carré intégrable avec  $\text{Jord}(\text{Res}_r^{GL})$  contenant  $(\rho, 2s_0 + 1)$  avec multiplicité 2 d'après les remarques 1 et 2 de 1.2.2. La contradiction vient du résultat annoncé par Arthur sur l'absence de multiplicité. On vient donc de montrer que si  $(\rho, 2s_0 + 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  alors les pôles des séries d'Eisenstein sont au plus d'ordre 1 en  $s = s_0$ .

On démontre maintenant la proposition dans le cas où  $(\rho, 2s_0 + 1) \notin \text{Jord}(\pi^{GL})$ . On reprend encore la démonstration de la proposition de 1.2.2 ; en particulier on fixe  $(\rho', s')$  tel que  $\pi[\rho', s'] \neq 0$  ; on sait que  $(\rho', 2s' + 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  donc  $(\rho', s') \neq (\rho, s_0)$ . Ainsi les pôles des opérateurs de type 1 ne peuvent venir que des pôles des séries d'Eisenstein associées aux induites  $\rho||^s \times \pi[\rho', s']$  si  $\pi[\rho', s']$  est de carré intégrable et des pôles des séries d'Eisenstein associée à l'induite  $\rho||^s \times \pi''$  (avec les notations de loc. cite) sinon. D'après la proposition par récurrence, on obtient alors le résultat pour ces opérateurs.

On regarde ensuite l'opérateur d'entrelacement de type 2 ; on sait que s'il n'est pas holomorphe ses résidus donnent lieu à des termes constants avec un exposant de la forme  $\rho||^{-s_0} \otimes \pi'$ . On va vérifier que c'est le seul opérateur d'entrelacement dont un résidu donne un terme constant de cette forme ; en effet, s'il n'en est pas ainsi il faudrait qu'un terme constant de  $\pi'$  soit dans une représentation de la forme  $\rho||^{-s_0} \otimes \pi''$  (où ici  $\pi''$  est quelconque). Mais cela force  $(\rho, 2s_0 + 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  d'après la proposition de 1.2.1 et ceci est exclu par hypothèse. Ainsi si cet opérateur a un pôle d'ordre au moins 2, il en est de même de la série d'Eisenstein. On peut alors appliquer la démonstration de Langlands car on a démontré que tous les résidus sont de carré intégrable : or si le pôle n'est pas d'ordre 1, l'algèbre de Hecke sphérique n'opère pas de façon semi-simple (cf. [32] page 163). Ceci termine la preuve.

**Proposition 2.** *Soit encore  $\rho_0, s_0, \pi$ . Ici on suppose que  $\{(\rho_0, 2s_0 - 1), (\rho_0, 2s_0 + 1)\} \cap \text{Jord}(\pi^{GL}) = \emptyset$ . Alors les séries d'Eisenstein construites sur la représentation induite  $\text{Speh}(\rho_0, 2s_0)||^s \times \pi$  ont des pôles d'ordre 1 au plus en  $s = 1/2$ .*

Si  $s_0 = 1/2$  cette proposition est un cas particulier de la proposition précédente. On suppose donc que  $s_0 > 1/2$ .

La représentation  $Speh(\rho_0, 2s_0) ||^{1/2+s'}$  est un quotient irréductible de la représentation,  $\rho_0 ||^{s_0+s'} \times Speh(\rho_0, 2s_0 - 1) ||^{s'}$  exactement elle se réalise dans l'ensemble des fonctions

$$\left( (s' - s'')E(\rho_0 ||^{s_0+s'} \times Speh(\rho_0, 2s_0 - 1) ||^{s''), f_{s'}} \right)_{s'=s''}$$

où les séries d'Eisenstein sont prises pour le groupe linéaire convenable avec des sections,  $f_{s'}$ , de l'induite écrite. On doit donc calculer les pôles des séries d'Eisenstein construites sur l'induite  $\rho_0 ||^{s_0+s'} \times Speh(\rho_0, 2s_0 - 1) ||^{s''} \times \pi$ , en  $s' = s'' = 0$ . L'hyperplan  $s'' = 0$  ne donne pas de pôle car les séries d'Eisenstein pour les groupes de même type que  $G$  basée sur l'induite  $Speh(\rho_0, 2s_0 - 1) ||^{s''} \times \pi$  sont holomorphes sur l'axe unitaire. L'hyperplan  $s' = 0$  n'est pas non plus singulier car il ne peut l'être que s'il est singulier pour les séries d'Eisenstein pour les groupes de même type que  $G$  basée sur l'induite  $\rho_0 ||^{s_0+s'} \times \pi$ ; ceci n'est pas le cas par l'hypothèse  $s_0 > 1/2$  et  $(\rho_0, 2s_0 - 1) \notin Jord(\pi^{GL})$ . Les hyperplans qui restent se voient en regardant des opérateurs d'entrelacement qui se factorise par un groupe linéaire et une induite de la forme  $\rho_0 ||^{s_0+s'} \times \rho_0 ||^{\zeta(t+s'')}$  avec  $t \in [-(s_0 - 3)/2, (s_0 - 3)/2]$  et  $\zeta = \pm$ . Les seuls pôles sont pour  $t = (s_0 - 3)/2$  et  $\zeta = +$  ou  $t = -(s_0 - 3)/2$  et  $\zeta = -$ . Les hyperplans singuliers sont donc uniquement  $s' = \pm s''$ . Comme on multiplie par la fonction  $(s' - s'')$  pour calculer les pôles de l'énoncé, il ne reste que l'hyperplan  $s' + s''$  qui fournit un pôle d'ordre 1 au plus en  $s' = s'' = 0$ . D'où la proposition.

### 1.3 Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de carré intégrable de  $G$ ; on utilise  $Jord(\pi^{GL})$ . Soit  $(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})$  avec  $b > 1$  (on suppose qu'un tel élément existe); on définit alors la représentation du groupe linéaire convenable :

$$Speh(\rho, b - 2) \times_{(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL}) - \{(\rho, b)\}} Speh(\rho', b'), \quad (1)$$

où le premier facteur n'apparaît pas si  $b = 2$ . Deux cas sont possibles. Le premier est celui où  $(\rho, b - 2) \notin Jord(\pi^{GL})$ ; on pose alors  $Jord^{\rho, b}(\pi^{GL})$  l'ensemble qui se déduit de  $Jord(\pi^{GL})$  en remplaçant  $(\rho, b)$  par  $(\rho, b - 2)$  et on note  $\pi^{\rho, b, GL}$  la représentation (1). La représentation  $\pi^{\rho, b, GL}$  est  $\theta$ -discrète et correspond à un paquet d'Arthur de représentations de carré intégrable de  $G$ . Le deuxième cas est celui où  $(\rho, b - 2) \in Jord(\pi^{GL})$ ; dans ce cas, on pose  $Jord^{\rho, b}(\pi^{GL}) := Jord(\pi^{GL}) - \{(\rho, b), (\rho, b - 2)\}$  et on pose

$$\pi^{\rho, b, GL} := \times_{(\rho', b') \in Jord^{\rho, b}(\pi^{GL})} Speh(\rho', b').$$

La représentation (1) est alors l'induite  $Speh(\rho, b - 2) \times Speh(\rho, b - 2) \times \pi^{\rho, b, GL}$  et la représentation  $\pi^{\rho, b, GL}$  définit encore un paquet d'Arthur de représentation de carré intégrable d'un groupe de même type que  $G$ .

**Théorème.** *Soit  $\pi$  comme ci-dessus et on suppose que  $\pi$  n'est pas cuspidale. Alors, il existe  $(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})$  avec  $b > 1$  et une représentation  $\pi'$  dans le paquet défini par  $\pi^{\rho, b, GL}$  tel que  $\pi$  se réalise dans l'espace des résidus de séries d'Eisenstein*

$$\left( sE(\rho ||^{(b-1)/2+s} \times \pi', f_s) \right)_{s=0}$$

dans le cas où  $(\rho, b - 2) \notin Jord(\pi^{GL})$  et

$$\left( sE(Speh(\rho, b - 1) ||^{1/2+s} \times \pi', f_s) \right)_{s=0}$$

dans le cas où  $(\rho, b - 2) \in Jord(\pi)$ , où dans les 2 cas,  $f_s$  parcourt les sections de l'induite écrite.

Pour simplifier l'écriture, on pose  $s_0 = (b - 1)/2$ .

Ce résultat est fortement suggéré par les propriétés des termes constants déjà démontrées mais je ne crois pas qu'il en résulte. Pour la démonstration, on revient à la construction de Langlands du spectre résiduel en tenant compte du fait que les résidus des séries d'Eisenstein sont calculés sur les mêmes hyperplans que ceux du produit scalaire des pseudos séries d'Eisenstein d'après par exemple [32] remarque de VI.1.2. Langlands utilise le théorème des résidus d'abord le long de chemin de la forme suivante où  $k$  est un entier convenable éventuellement nul

$$\rho ||^s \times_{i \in [1, k]} \text{Speh}(\rho_i, b_i) ||^{s_i} \times \pi_0, \quad (1)$$

où  $\rho$  et tous les  $\rho_i$  sont des représentations cuspidales unitaires, les  $b_i$  sont des entiers,  $\pi_0$  est une représentation irréductible de carré intégrable de même type que  $G$ , les  $s_i$  sont des nombres complexes voisins de 0 dont la partie réelle est positive strictement et le chemin consiste à faire décroître la partie réel de  $s$  en partant d'un réel très positif vers un réel très voisin de 0. Sur ce chemin, on a différent type d'hyperplans singuliers; considérons d'abord ceux qui correspondent aux induites  $\rho ||^s \times \pi_0$ . Ceux là vont fournir des résidus qui sont au moins dans  $\mathcal{A}_{log}$ , mais pour cela la procédure s'arrête puisque l'on est sur l'axe unitaire; on ne peut obtenir un résidu de carré intégrable que si  $k = 0$ . Montrons que l'on obtient alors le premier cas de la proposition. Grâce à 1.2.2 on sait que l'on se trouve en  $s = s_0$  avec  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi_0^{GL})$  et  $(\rho, 2s_0 + 1) \notin \text{Jord}(\pi_0^{GL})$ . De plus  $\text{Jord}(\pi_0^{GL})$  ne contient  $(\rho, 2s_0 - 1)$  qu'avec multiplicité 1; comme  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  se déduit de  $\text{Jord}(\pi_0^{GL})$  simplement en remplaçant  $(\rho, 2s_0 - 1)$  par  $(\rho, 2s_0 + 1)$ , on voit que  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  ne contient pas  $(\rho, 2s_0 - 1)$ .

Les autres hyperplans singuliers sont pour les  $i \in [1, k]$  tel que  $\rho_i \simeq \rho$  (quitte à tordre par un caractère unitaire) et sur les hyperplans (pour de tel  $i$ ) de la forme

$$s - (b_i + 1)/2 - \zeta s_i = 0,$$

où  $\zeta = \pm$ . Le long d'un tel hyperplan on obtient des résidus qui sont dans

$$\text{Speh}(\rho, b_i + 1) ||^{\zeta 1/2 + s_i} \times_{j \in [1, k], j \neq i} \text{Speh}(\rho_j, b_j) \times \pi_0.$$

On n'est pas au voisinage de l'axe unitaire à cause du premier facteur et il faut donc encore déformer. Supposons d'abord que  $\zeta = +$ ; il faut encore faire un chemin faisant décroître la partie réelle de  $s_i$ ; on traverse l'hyperplan  $s_i = 0$ ; celui-ci peut donner des pôles conformément à la proposition 2 de 1.2.3. On vérifie que c'est le seul hyperplan donnant éventuellement des pôles: il n'y a plus de demi-entiers, or on sait que grâce à [31] pour les facteurs en GL et à Arthur pour le facteur contenant  $\pi_0$  que seul les demi-entiers fournissent des pôles (on détaille l'argument ci-dessous dans le cas où  $\zeta = -$ ).

Supposons maintenant que  $\zeta = -$ , il faut maintenant faire remonter  $-1/2 + s_i$  vers l'axe unitaire, c'est-à-dire faire croître la partie réel de  $s_i$  jusqu'à un réel supérieur légèrement à  $1/2$  on écrit donc  $-1/2 + s_i = -s'$  et on fait décroître  $s'$  vers 0 en partant d'un réel strictement plus petit que  $1/2$ . Regardons d'abord l'hyperplan  $s' = 0$ ; sur cet hyperplan on est dans un voisinage de l'axe unitaire

$$\text{Speh}(\rho, b_i + 1) \times_{j \in [1, k]; j \neq i} \text{Speh}(\rho_j, b_j) \times \pi_0.$$

Il n'y a pas de pôle et même si  $k = 1$ , on est dans  $\mathcal{A}_{log}$  sans être dans  $\mathcal{A}^2$ . Si le chemin rencontre un hyperplan singulier, cet hyperplan est soit de la forme  $s' = c$  avec  $\text{Re } c \in ]0, 1/2[$  soit de la forme  $s' - \mu s_j = c$  avec  $j \in [1, k]$ ,  $j \neq i$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  et  $c \in \mathbb{C}$  vérifiant aussi  $\text{Re } c \in ]0, 1/2[$  car les hyperplans singuliers sont en nombre fini (quand on a fixé suffisamment de choses) et l'hyperplan singulier doit rencontrer des points  $(s', s_j)$  où  $s_j$  peut être pris aussi voisin de 0 que l'on veut. On pourrait encore avoir à déformer des chemins et il faut tenir compte de simplifications éventuelles quand les données de base varient mais à la fin on est sûr, s'il reste des résidus, d'arriver dans une représentation de  $\mathcal{A}_{log}$  dont le support cuspidal sera aussi celui d'une représentation de la forme

$$\times_{\rho', x'} \rho' ||^{x'} \times \pi_{cusp},$$

où certains  $x'$  ne seront pas demi-entiers. C'est exclu par les conjectures d'Arthur (cf. 1.1) : en effet ceci entraîne qu'un sous-groupe de Levi de  $G$  a une représentation de carré intégrable ayant (à l'ordre près) le support cuspidal écrit. Comme on connaît la situation pour les facteurs qui sont des groupes linéaires, on voit qu'il existe un groupe de même type que  $G$  mais de rang éventuellement plus petit ayant une représentation de carré intégrable  $\tau$  de support cuspidal celui d'une représentation de la forme  $\times_{\rho'', x''} \rho'' ||^{x''} \times \pi_{cusp}$  avec certains  $x''$  non demi-entiers. Arthur associe une représentation  $\tau^{GL}$  d'un groupe linéaire convenable à  $\tau$  de la forme  $\times_{(\rho, b) \in Jord(\tau)} Speh(\rho, b)$  et une représentation d'un autre groupe linéaire,  $\pi_{cusp}^{GL}$  à  $\pi_{cusp}$ . La représentation isobarique associée à l'induite  $\times_{\rho'', x''} (\rho'' ||^{x''} \times \rho'' ||^{x''}) \times \pi_{cusp}^{GL}$  (en toute place on considère le sous-quotient de Langlands) et la représentation  $\tau^{GL}$  sont isomorphes presque partout et donc isomorphes. Or le support cuspidal de  $\tau^{GL}$  ne fait intervenir que des demi-entiers, il doit donc en être de même pour tous les  $x''$ .

Donc la seule possibilité de réaliser  $\pi$  par cette procédure est obtenue en prenant les résidus d'abord sur l'hyperplan  $s - (b_i + 1)/2 = s_i$  puis sur l'hyperplan  $s_i = 0$ ; mais en plus il faut  $k = 1$  pour que le résultat soit de carré intégrable. Le premier résidu nous place dans la représentation

$$Speh(\rho, b_i + 1) ||^{1/2 + s_i} \times \pi_0.$$

Si  $\pi$  est obtenu dans cet espace de résidu, on calcule facilement les supports cuspidaux et on obtient que  $Jord(\pi^{GL}) = Jord(\pi_0^{GL}) \cup \{(\rho, 2s_0 + 1), (\rho, 2s_0 - 1)\}$ ; ainsi dans ce cas  $(\rho, 2s_0 + 1)$  et  $(\rho, 2s_0 - 1)$  sont des éléments de  $Jord(\pi^{GL})$  qui ne peuvent être dans  $Jord(\pi_0^{GL})$ . La proposition 2 de 1.2.3 dit alors que  $\pi$  se réalise bien dans l'espace décrit dans la 2e partie de l'énoncé avec  $s_0 = (b_i + 1)/2$ . De plus  $Jord(\pi_0^{GL})$  coïncide avec  $Jord^{\rho, 2s_0 + 1}(\pi^{GL})$ . Cela termine la preuve du théorème.

## 2 Normalisation des opérateurs d'entrelacement ou encore, contribution des places sphériques.

Dans ce qui suit on étudie des opérateurs d'entrelacement; le point de départ sont les opérateurs d'entrelacement standard qui nécessitent un certain nombre de choix totalement sans importance pour nous car seuls les propriétés d'holomorphie nous importent. Mais comme il faut fixer les choix et comme on s'appuie sur les résultats de Shahidi, on fait les choix de Shahidi ([36]).

On fixe encore  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de  $G(\mathbb{A})$  comme en 1.1. Rappelons ce qui nous intéresse : pour toute place  $v$  de  $k$ , la composante  $\pi_v$  est dans le paquet défini par la composante  $\pi_v^{GL}$  de  $\pi^{GL}$ . Aux places archimédiennes, malheureusement hormi le cas où le caractère infinitésimal est régulier, on ne sait pas trop ce que cela implique sur  $\pi_v$ . Mais aux places finies, nous avons donné une description très précise de  $\pi_v$  en fonction de  $\pi_v^{GL}$  dès que le lemme fondamental pour les algèbres de Lie (ordinaire, tordu et non standard) et donc le transfert est connu; on a donc besoin de [43],[41], [21] et [34]. Ceci est fait en plusieurs étapes cf [27] et reprend les idées d'Arthur. Les théorèmes démontrés ici n'utiliseront pas les résultats de [27] pour les rendre indépendants, on les utilisera pour donner des éléments de justifications aux conjectures faites.

On fixe  $\rho$  une représentation cuspidale irréductible et unitaire d'un groupe  $GL(d, \mathbb{A})$ . On suppose que  $\rho$  est  $\theta$  invariante pour simplifier les notations et on s'intéresse d'abord, pour tout  $s \in \mathbb{C}$  à l'opérateur d'entrelacement standard :

$$M(\rho \times \pi, s) : \rho ||^s \times \pi \rightarrow \rho ||^{-s} \times \pi.$$

On sait que cet opérateur est méromorphiquement défini et on sait qu'il admet un développement Eulérien à l'aide des opérateurs d'entrelacement standard locaux qui eux aussi sont méromorphiquement définis (cf. [32] II.1.9 qui reprend un appendice de [19]). Pour  $v$  une place de  $k$ , on note  $M_v(\rho \times \pi, s)$  l'opérateur local correspondant. Grâce à Langlands, si à la place  $v$  tout est non ramifié,

on sait calculer  $M_v(\rho \times \pi, s)$  sur les vecteurs sphériques [20] ; c'est une fonction méromorphe de  $s$ , notée  $r_v(\rho, \pi^{GL}, s)$ . Elle vaut, à une fonction holomorphe inversible près de  $s$  (connue), le produit de

$$r_v(\rho_v \times \pi_v^{GL}, s) := L(\rho_v \times \pi_v^{GL}, 2s) / L(\rho_v \times \pi_v^{GL}, 2s + 1)$$

avec  $L(\rho_v, r_G, 2s) / L(\rho_v, r_G, 2s + 1)$  où  $r_G$  est la représentation de  $GL(d_\rho, \mathbb{C})$  associée au groupe  $G$  (cf. introduction) ; pour arriver à ce résultat, il faut faire le calcul dans les séries principales non ramifiées et on voit apparaître des fonctions  $L$  de caractères pour toutes les racines inversées par l'opérateur d'entrelacement. On obtient alors une fonction  $L$  pour l'action de  $GL(d_\rho, \mathbb{C})$  dans le radical unipotent du parabolique dual, représentation de longueur 2 qui donne les 2 facteurs ci-dessus ; ceci est expliqué dans les articles de Shahidi (cf. par exemple [36]).

En une place  $v$  où tout est non ramifié, on veut précisément que l'opérateur d'entrelacement normalisé soit l'identité sur les vecteurs sphériques. Il faut donc poser, pour toute place  $v$  (avec on sans ramification) :

$$N_v(\rho \times \pi, s) = r_v(\rho, \pi^{GL}, s)^{-1} M_v(\rho \times \pi, s).$$

Bien sûr on pourrait garder  $M_v(\rho \times \pi, s)$  mais la difficulté est alors que la contribution des places sphériques se fera avec des fonctions  $L$  partielles du genre  $L^S(\rho \times \pi, s) / L^S(\rho \times \pi, s + 1)$  et ces fonctions ont un comportement extrêmement désagréables.  $L^S(\rho, \times \pi, s)$  peut avoir des zéros de l'ordre dépend de  $|S|$  qui sont d'origine local et que l'on ne maîtrise pas du tout. En faisant les calculs avec  $N_v(\rho \times \pi)$  on a précisément complété la contribution des places sphériques pour avoir des fonctions  $L$  complètes dont on connaît les pôles et dont on sait limiter la localisation des zéros.

## 2.1 Normalisation aux places finies

Cette section comme la suivante sert à montrer que les constructions faites sont les "bonnes". On montre que les opérateurs d'entrelacement  $N_v$  vérifie la formule du produit. Le point est de démontrer que

$$N_v(\rho \times \pi, -s) \circ N_v(\rho \times \pi, s) = \phi_v(s) Id, \quad (*)$$

où  $\phi_v(s)$  est une fonction holomorphe inversible de  $s$ . On peut s'arranger bien évidemment pour que cette fonction vaille 1 mais ce n'est pas notre propos ici. Dans cette partie on prouve (\*) dans le cas des places non archimédiennes.

On continue avec les notations du paragraphe précédent et on suppose ici que  $v$  est une place finie. On rappelle que l'on a associé  $Jord(\pi^{GL})$  à la représentation globale  $\pi$  ; localement, on obtient une description de  $\pi_v^{GL}$  sous la forme

$$\pi_v^{GL} \simeq \times_{(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL})} Speh(\rho'_v, b').$$

Grâce à l'approximation de la conjecture de Ramanujan, on sait que  $\rho'_v$  est essentiellement une induite de représentation de Steinberg ; ce n'est pas tout à fait vrai, il faut accepter un peu de torsion par  $||^x$  avec  $x \in ]-1/2, 1/2[$ . On va oublier ce point ici qui n'induit aucune difficulté supplémentaire mais gêne considérablement l'écriture et on définit  $Jord(\rho'_v)$  comme l'ensemble des couples  $(\tau, a)$  où  $\tau$  est une représentation cuspidale unitaire locale et  $a$  un entier tel que  $\rho'_v \simeq St(\tau, a)$  c'est-à-dire que  $\rho'_v$  est la représentation tempérée induite des Steinberg écrites. On regroupe pour écrire

$$\pi_v^{GL} \simeq \times_{(\tau, a, b) \in Jord(\pi_v)} Speh(St(\tau, a), b),$$

où maintenant  $Jord(\pi_v)$  est un ensemble des triplets. Un tel ensemble de triplet s'interprète bien comme une représentation irréductible de dimension  $n^*$  de  $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  (grâce à la correspondance locale de Langlands) et ce qui nous intéresse est la restriction à la diagonale de  $SL(2, \mathbb{C})$  de cette représentation qui est alors vue comme une représentation de  $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ . Explicitement,

on définit  $\mathcal{E}_{v,\Delta,\pi}$  comme l'ensemble des couples  $(\tau, c)$  où  $c \in [|a-b|+1, a+b-1]$  avec même parité que  $a+b$  pour  $(\tau, a, b)$  parcourant  $\mathcal{E}_{v,\pi}$ . On note alors

$$\pi_{\Delta,v}^{GL} = \times_{(\tau,c) \in \mathcal{E}_{v,\Delta,\pi}} \times_{x \in [-(c-1)/2, (c-1)/2]} \tau | \cdot |^x.$$

Il est immédiat que  $\pi_v^{GL}$  est un sous-quotient de  $\pi_{\Delta,v}^{GL}$ . On considère le composé des opérateurs d'entrelacement standard

$$M_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, -s) \circ M_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, s)$$

comme une fonction méromorphe et le fait que  $\pi_v^{GL}$  soit un sous-quotient de  $\pi_{\Delta,v}^{GL}$  entraîne que cette fonction méromorphe coïncide avec

$$M_v(\rho \times \pi^{GL}, -s) \circ M_v(\rho \times \pi^{GL}, s) = r_v(\rho \times \pi^{GL}, -s) r_v(\rho \times \pi^{GL}, s)$$

On définit  $r_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, s)$  à la Langlands-Shahidi comme ci-dessus et on vient donc de vérifier (ce qui est en fait bien connu) que

$$r_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, s) r_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, -s) = r_v(\rho \times \pi^{GL}, -s) r_v(\rho \times \pi^{GL}, s). \quad (1)$$

Dans la normalisation pour le groupe  $G$ , il y a aussi le facteur  $r_v^G(s) := L(\rho_v, r_G, 2s) / L(\rho_v, r_G, 2s+1)$ . Et on va montrer que le premier terme de l'égalité ci-dessus, multiplié par le facteur  $r_v^G(s) r_v^G(-s)$  vaut aussi  $m_v(\rho, \pi, s) := M_v(\rho \times \pi, -s) \times M_v(\rho \times \pi, s)$  à un facteur holomorphe inversible près. Comme ci-dessus, on peut remplacer  $\pi_v$  par n'importe quelle induite contenant  $\pi_v$  comme sous-quotient.

On commence donc par considérer le cas où  $\pi_v$  est cuspidale ; c'est dans ce cas qu'une propriété non triviale intervient. En [28], on a utilisé les pôles des fonctions  $m_v(\rho, \pi, s)$  pour définir les blocs de Jordan de  $\pi_v$  ; on a en [24] et [25] interprété ces blocs de Jordan comme les représentations de Steinberg qui interviennent dans la représentation tempérée,  $\theta$  discrète, du  $GL$  correspondant ; cette représentation du groupe linéaire est une représentation tempérée que l'on note  $\pi_{temp,v}^{GL}$ . Cette identification se traduit par l'égalité

$$m_v(\rho, \pi, s) = r_v(\rho_v \times \pi_{temp,v}^{GL}, s) r_v(\rho_v \times \pi_{temp,v}^{GL}, -s) r_v^G(s) r_v^G(-s). \quad (2)$$

On sait associer une représentation de  $W_{k_v} \times SL(2, \mathbb{C})$  à  $\pi_{temp,v}^{GL}$ . On a démontré en [26] (section 7) que cette représentation de  $W_{k_v} \times SL(2, \mathbb{C})$  est la restriction à la diagonale du produit de 2 copies de  $SL(2, \mathbb{C})$  de la représentation de  $W_{k_v} \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  associé à  $\pi_v^{GL}$ . En terme explicite, avec les notations déjà introduites, la représentation est

$$\pi_{temp,v}^{GL} = \times_{(\tau,a,b)} \times_{c \in [|a-b|+1, a+b-1]_2} St(\tau, c),$$

où l'indice 2 dit que l'on ne garde de l'intervalle que les entiers ayant même parité que les bornes.

Cela veut dire que  $\pi_{temp,v}^{GL}$  est un sous-quotient de  $\pi_{\Delta,v}^{GL}$ . Grâce à (1), on peut enlever le *temp* dans (2). Ceci prouve notre assertion dans le cas où  $\pi_v$  est cuspidale.

Le cas général se déduit de ce cas particulier par des propriétés standard : pour calculer les produits des opérateurs d'entrelacement, on peut remplacer  $\pi_v$  par n'importe quelle représentation induite de cuspidale contenant  $\pi_v$  comme sous-module irréductible. Le produit des opérateur d'entrelacement ne dépend donc que du support cuspidal de  $\pi_v$ , il y a même une propriété de multiplicativité bien connue. C'est une propriété assez facile de voir que le support cuspidal de  $\pi_v^{GL}$  ne dépend que du support cuspidal de  $\pi_v$  (cf. [26] section 7) ; on voit que l'on a la même propriété de multiplicativité pour  $r_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, s) r_v(\rho_v \times \pi_{\Delta,v}^{GL}, -s)$  la même propriété de multiplicativité puisque cela calcule un produit d'opérateur d'entrelacement (cf. ce qui précède (1)). C'est comme cela que l'on obtient l'égalité cherchée à un facteur holomorphe inversible près.

### 2.1.1 Remarques et exemples

Ici, on voudrait juste faire une remarque déjà faite ailleurs pour expliquer que la notion de normalisation des opérateurs d'entrelacement faite ici est d'ordre global et non local. Fixons  $v$  une place finie et  $\pi_0$  une représentation cuspidale en cette place. Il y a au moins 2 paquets qui contiennent cette représentation  $\pi_0$ ; l'un correspond à un paramètre d'Arthur trivial sur la 2e copie de  $SL(2, \mathbb{C})$ ; c'est à dire un paquet tempéré et l'autre à un paramètre d'Arthur trivial sur la 1e copie de  $SL(2, \mathbb{C})$ ; on dira alors que  $\pi_0$  est dans un paquet unipotent. On peut très bien globaliser ces paquets. Fixons encore une représentation  $\rho_0$ , tempérée, d'un groupe linéaire en la place  $v$  fixée; cette représentation aussi peut se globaliser. On a à considérer l'opérateur d'entrelacement standard

$$M(s) := \rho_0 ||^s \times \pi_0 \rightarrow \rho_0 ||^{-s} \times \pi_0.$$

Suivant le paquet global, les normalisations ne seront pas les mêmes; si  $\pi_0$  se trouve dans un paquet global tempéré en la place  $v$ , ou encore si  $\pi_v^{GL}$  est tempérée, la fonction  $L_v(\rho_{0,v} \times \pi_v^{GL}, s)$  est une fonction qui n'a pas de pôle pour  $Re s > 0$ . De plus l'opérateur  $M_v(s)$  est holomorphe pour  $Re s > 0$ . Donc l'opérateur normalisé est holomorphe non identiquement nul en tout  $s$  tel que  $Re s > 0$ . Il n'en est pas de même si le paquet global est unipotent en la place  $v$ ; sous cette hypothèse  $\pi_v^{GL}$  est une induite de représentations de Speh locale, c'est-à-dire s'écrit sous la forme  $\times_{\tau,b} Speh(\tau, b)$  pour un ensemble de couples convenables, où  $\tau$  est cuspidale. On a alors

$$L_v(\rho_{0,v} \times \pi_v^{GL}, s) / L_v(\rho_{0,v} \times \pi_v^{GL}, s+1) = \times_{\tau,b} L_v(\rho_{0,v} \times \tau, s - (b-1)/2) / L_v(\rho_{0,v} \times \tau, s + (b+1)/2).$$

Cette fonction peut donc avoir des pôles pour  $Re s > 0$ . L'opérateur  $M_v(s)$  lui est toujours holomorphe pour  $Re s > 0$  puisqu'il ne dépend que de  $\pi_{0,v}$  et donc l'opérateur normalisé est bien holomorphe pour  $Re s > 0$  mais peut être identiquement nul pour certaines valeurs de  $s$  avec  $Re s > 0$ . C'est un phénomène assez technique mais qui se produit et qui s'interprète comme le fait qu'un opérateur d'entrelacement a un zéro local, par zéro on entend identiquement zéro. Un tel zéro supprime des pôles de séries d'Eisenstein, c'est ce que l'on redira en 4.5.

## 2.2 Le cas des places archimédiennes

Les paquets d'Arthur sont définis en [1]. On pose  $F = k_v$  et on considère les représentations semi-simples,  $\phi$ , de  $W_F$  dans le groupe dual de  $G$  qui ont un prolongement semi-simple borné à  $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$  où  $W_F$  se plonge dans  $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$  par le produit de l'identité avec l'homomorphisme dans le tore diagonal de  $SL(2, \mathbb{C})$  :

$$w \in W_F \mapsto \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Quand un tel prolongement existe, il est uniquement déterminé à conjugaison près et on le note  $\psi_\phi$ . A l'inverse quand on a  $\psi$ , on en déduit  $\phi_\psi$  en restreignant à  $W_F$  avec le plongement ci-dessus. En utilisant simplement  $\phi$ , [1] associe un ensemble de représentations de  $G(F)$ , que l'on appelle les représentations dans le paquet de  $\psi_\phi$  et une combinaison linéaire de ces représentations dont il montre qu'elle est stable. Les auteurs montrent aussi les propriétés d'endoscopie conforme aux conjectures d'Arthur mais ils ne montrent pas en général que la (à un scalaire près) distribution stable associée à  $\psi$  se transfère (à un scalaire près) en la trace tordue de la représentation de  $GL(n^*, F)$  associée à  $\iota \circ \phi$ . Toutefois, on sait que les représentations du paquet de Langlands associé à  $\phi$  sont dans le paquet d'Arthur associé à  $\psi_\phi$ ; c'est même la base de la construction. Supposons pour le moment que  $\pi_v$  soit dans le paquet de Langlands associé à un tel morphisme  $\phi$  et que la représentation  $\pi_v^{GL}$  est la représentation associée à  $\iota \circ \phi$ ; c'est ce que l'on attend. La functorialité de Langlands connue pour les groupes archimédiens donne alors l'égalité des fonctions  $L$  de paires pour  $\rho_v \times \pi_v$  et  $\rho_v \times \pi_v^{GL}$ . Donc dans ce cas on obtient l'égalité cherchée :

$$M_v(\rho_v \times \pi_v, -s) \circ M_v(\rho_v \times \pi_v, s) = r_v(\rho_v, \pi_v^{GL}, -s) r_v(\rho_v, \pi_v^{GL}, s).$$

Je suppose que l'on peut déduire le cas général de ce cas particulier mais je ne sais pas le faire. Le plus rapide est d'utiliser un argument global/local. Cela oblige à faire le produit tensoriel sur toutes les places archimédiennes, on notera ce produit tensoriel avec un indice infini. Le produit tensoriel sur toutes les places finies est noté avec l'indice  $f$ .

L'équation fonctionnelle globale pour  $M(\rho \times \pi, s)$  donne

$$\begin{aligned} Id &= M(\rho \times \pi, -s) \circ M(\rho \times \pi, s) = (M_\infty(\rho \times \pi, -s) \circ M_\infty(\rho \times \pi, s))(M_f(\rho \times \pi, -s) \circ M_f(\rho \times \pi, s)) \\ &= r_\infty(\rho, \pi^{GL}, -s)r_\infty(\rho, \pi^{GL}, s)(N_\infty(\rho, \pi^{GL}, -s) \circ N_\infty(\rho, \pi^{GL}, s))r_f(\rho, \pi^{GL}, -s)r_f(\rho, \pi^{GL}, s) \end{aligned}$$

à une fonction holomorphe inversible près de  $s$ , d'après ce que l'on a déjà vu dans le cas des places finies. Mais

$$\begin{aligned} &r_\infty(\rho, \pi^{GL}, -s)r_\infty(\rho, \pi^{GL}, s)r_f(\rho, \pi^{GL}, -s)r_f(\rho, \pi^{GL}, s) = \\ &L(\rho \times \pi^{GL}, s)L(\rho \times \pi^{GL}, -s)L(\rho, r_G, 2s)/L(\rho \times \pi^{GL}, 1+s)L(\rho \times \pi^{GL}, 1-s)L(\rho, r_G, 2s+1). \end{aligned}$$

Et par l'équation fonctionnelle cela vaut une fonction holomorphe inversible de  $s$ . On en déduit que le composé

$$(N_\infty(\rho \times \pi, -s) \circ N_\infty(\rho \times \pi, s))$$

est une fonction holomorphe inversible de  $s$ .

### 2.3 Normalisation générale

Jusqu'à présent, nous n'avons regardé que l'opérateur d'entrelacement associé à l'élément de longueur maximal du groupe de Weyl; c'est le seul qui intervient dans tous les cas. Mais si  $\pi$  n'est pas cuspidale d'autres opérateurs interviennent. Ces opérateurs interviennent dans la situation suivante : soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  dont on note  $M$  un sous groupe de Levi. On considère le terme constant des formes automorphes incluses dans  $\pi$  le long du radical unipotent de  $P$  et leur projection sur les formes automorphes cuspidales de  $M$ . On suppose que ces projections ne sont pas identiquement zéro et on considère une sous-représentation irréductible incluse dans cet espace que l'on écrit sous la forme d'un produit tensoriel

$$\otimes_{i \in [1, \ell]} \rho_i | \cdot |^{x_i} \otimes \pi_0,$$

où les  $\rho_i$  sont des représentations cuspidales unitaires irréductibles de groupes linéaires, les  $x_i$  sont des réels et  $\pi_0$  est une représentation cuspidale d'un groupe de même type que  $G$ . Les opérateurs d'entrelacement à considérer sont associés à un élément  $\ell_0 \in [1, \ell]$  et un signe  $\delta$  et se représente comme l'homomorphisme ( $w$  est l'élément du groupe de Weyl évident dont on a fixé un représentant qui n'importe pas pour les propriétés d'holomorphicité qui nous intéressent)

$$M(w, s) := \rho | \cdot |^s \times_{i \in [1, \ell]} \rho_i | \cdot |^{x_i} \times \pi_0 \rightarrow \times_{i \leq \ell_0} \rho | \cdot |^{x_i} \rho | \cdot |^{\delta s} \times_{i \in [\ell_0, \ell]} \rho_i | \cdot |^{x_i} \times \pi_0.$$

A cet homomorphisme on sait associer un opérateur d'entrelacement standard, défini méromorphiquement. On sait aussi très bien calculer l'action de cet opérateur aux places sphériques ce qui impose la "normalisation", en toute place  $v$ ,  $N_v(w, s) := M_v(w, s)r_v(w, s)^{-1}$ , où (on oublie l'indice  $v$  pour les représentations pour alléger l'écriture et les facteurs  $\epsilon$  et autre signe)

$$\text{si } \delta = +, r_v(w, s) = \prod_{i \in [1, \ell_0]} L_v(\rho \times \rho_i, s - x_i) / L_v(\rho \times \rho_i, s - x_i + 1);$$

$$\text{si } \delta = -, r(w, s) = \prod_{i \in [1, \ell]} L_v(\rho \times \rho_i, s - x_i) / L_v(\rho \times \rho_i, s - x_i + 1)$$

$$\prod_{i \in [\ell_0, \ell]} \epsilon_v(\rho_i \times \rho, x_i + s) L_v(\rho_i \times \rho, x_i + s) / L_v(\rho_i \times \rho, x_i + s + 1) \times r_v(\rho, \pi_0^{GL}, s)$$

où le dernier facteur a déjà été défini.

La remarque principale est que la normalisation que l'on met est celle de Langlands-Shahidi pour les facteurs  $GL$ ; ainsi en toute place  $v$ , l'opérateur  $N_v(w, s)$  est un produit d'opérateurs d'entrelacement normalisés à la Langlands-Shahidi pour les échanges

$$\rho||^s \times \rho_i||^{x_i} \rightarrow \rho_i||^{x_i} \times \rho||^s,$$

pour  $i \leq \ell_0$  quand  $\delta = +$ . Quand  $\delta = -$ , on fait d'abord tous ces opérateurs pour tout  $i \in [1, \ell]$  puis on fait l'opérateur  $N(\rho \times \pi_0, s)$  déjà défini et refait des échanges, normalisé à la Langlands-Shahidi

$$\rho_i||^{x_i} \times \rho||^{-s} \rightarrow \rho||^{-s} \times \rho_i||^{x_i}.$$

Supposons que  $\delta = -$ . Ce qui précède montre l'égalité (à une fonction holomorphe inversible près)

$$N_v(w, s) = N_v(\rho \times \pi, s) \times_{i \in [1, \ell_0]} N_v(\rho \times \rho_i, -s - x_i),$$

où les normalisations de  $N_v(\rho \times \rho_i, -s - x_i)$  sont à la Langlands-Shahidi.

Remarquons que cette définition est tout à fait compatible aux factorisations évidentes; en 1.2.2, on avait considéré le cas où  $\pi \hookrightarrow \rho' ||^{-s'} \times \pi[\rho', s']$ ; si on suppose par exemple que  $\pi[\rho', s']$  est de carré intégrable et que dans la notation précédente  $\rho_1 ||^{x_1} = \rho' ||^{-s'}$ , on peut définir un analogue de  $M(w, s)$  en partant de  $\pi[\rho', s']$ ; on note  $M(w, \rho, \pi, s)$  au lieu de  $M(w, s)$  pour montrer la dépendance en  $\pi$  et on a clairement  $M(w, \rho, \pi, s) = M(w', \rho, \pi[\rho', s'], s)M(\rho \times \rho', s + s')$  où  $M(\rho \times \rho', s + s')$  est simplement l'entrelacement qui échange

$$\rho||^s \times \rho' ||^{-s'} \rightarrow \rho' ||^{-s'} \times \rho||^s.$$

On a la même décomposition en produit, en toute place  $v$ , quand on normalise où la normalisation de  $M_v(\rho \times \rho', s + s')$  est celle de Langlands-Shahidi.

### 3 Holomorphie des opérateurs d'entrelacements normalisés

On continue avec les notations des paragraphes précédents. On a donc la représentation automorphe de carré intégrable  $\pi$ , une représentation cuspidale  $\rho$  et on fixe une place  $v$  et  $s \in \mathbb{C}$  et on suppose que  $s$  est dans un voisinage d'un demi-entier strictement positif  $s_0$ .

#### 3.1 Le cas des représentations des groupes unitaires ayant de la cohomologie.

Dans cette section, on se place en une place  $v$  archimédienne. On suppose que  $\pi_v$  a de la cohomologie et on suppose aussi que le point  $s_0$  est tel que  $\rho_v ||_v^{s_0} \times \pi_v$  a un quotient irréductible ayant aussi de la cohomologie, on accepte n'importe quel système de coefficients. On note  $\tilde{\pi}_v$  l'induite construite à partir des paramètres de Langlands de  $\pi_v$  de telle sorte que  $\pi_v$  soit l'unique quotient irréductible de cette induite. On suppose aussi que le groupe  $G$  est un groupe unitaire. Cette dernière hypothèse est sans doute inutile mais je la mets pour avoir le lemme ci-dessous facilement.

**Lemme 1.** *Avec les hypothèses précédentes, l'induite  $\rho_v ||_v^{s_0} \times \tilde{\pi}_v$  a un unique quotient irréductible et ce quotient est le sous-quotient de Langlands de cette induite.*

Les représentations ayant de la cohomologie ont été classifiées complètement, le résultat final étant dû à [40]. Les paramètres de Langlands de ces représentations sont donnés en loc. cite mais les démonstrations sont dues à [39]. Nous allons utiliser l'explicitation de ces données faites en [8] 5.3. La notation standard est de dire que  $\pi_v \simeq A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ , où  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  de telle sorte qu'en notant  $L$  le sous-groupe de  $G(k_v)$  stabilisant  $\mathfrak{q}$  l'algèbre de Lie de  $L$  (complexifiée) soit une sous-algèbre de Levi de  $\mathfrak{q}$ ;  $\lambda$  est un caractère unitaire de  $L$ . En fait  $L$  n'est pas déterminé par  $\pi_v$  puisque plusieurs couples  $L, \lambda$  peuvent donner la même représentation  $\pi_v$ . Pour nous,  $L$  est

uniquement déterminé par  $\pi_v^{GL}$  et  $\pi_v$ ; en effet  $\pi_v^{GL}$  détermine  $L$  à forme intérieure près et  $\pi_v$  fixe cette forme intérieure (cf. [40]). Avec l'hypothèse que  $G$  est un groupe unitaire,  $L$  est un produit  $\times_{j \in [1, k]} U(p_j, q_j)$  où  $k$  est un entier convenable. La difficulté est que les constructions font intervenir une torsion qui ne peut pas toujours s'interpréter comme un caractère de  $L$ . Le plus simple est, à mon avis, de regarder la représentation de  $GL(n, \mathbb{C})$  qui correspond aux paquets des  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$  quand  $L$  varie parmi les formes intérieures possibles (le  $\lambda$  varie en conséquence), c'est expliqué dans [2]. On pose momentanément  $d_j := p_j + q_j$  pour tout  $j \in [1, k]$ . Cette représentation de  $GL(n, \mathbb{C})$  est une induite de caractères unitaires

$$\times_{j \in [1, k]} \chi_j \circ \det_{GL(d_j, \mathbb{C})}. \quad (1)$$

On écrit chaque  $\chi_j$  pour  $j \in [1, k]$  comme le caractère  $z \mapsto (z/\bar{z})^{n_j}$ ; les paramètres de Langlands de  $\pi_v$  sont alors :

le parabolique standard de Levi un produit de  $\sum_{j \in [1, k]} \inf(p_j, q_j)$  copies de  $\mathbb{C}^*$  par le groupe unitaire  $U(\sum_{j \in [1, k]} (p_j - \inf(p_j, q_j)), \sum_{j \in [1, k]} (q_j - \inf(p_j, q_j)))$ ;

un caractère (dominant)  $\nu$  du produit des facteurs  $\mathbb{C}^*$  et la série discrète  $A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0)$  où  $\mathfrak{q}_0$  est de même nature que  $\mathfrak{q}$  avec  $L_0 \simeq \times_{j \in [1, k]} U(p_j - \inf(p_j, q_j), q_j - \inf(p_j, q_j))$  et  $\lambda$  se déduit de  $\lambda_0$  essentiellement par restriction convenable.

Pour la suite, on écrit  $\nu$  comme produit de caractères  $\nu_\ell$  de  $\mathbb{C}^*$  pour  $\ell$  parcourant un ensemble convenable d'indices totalement ordonné (pour avoir la positivité de  $\nu$ ) et pour tout  $\ell$  dans cet ensemble il existe  $j \in [1, k]$  tel que  $\inf(p_j, q_j) > 0$  et  $t \in [0, \inf(p_j, q_j) - 1]$  tel que  $\nu_\ell$  soit le caractère  $z \mapsto z^{n_j + (p_j + q_j - 1)/2 - t} \bar{z}^{-n_j + (p_j + q_j - 1)/2 - t}$ ; le  $n_j$  de [8] est notre  $p_j + q_j$  et notre  $n_j$  contient le caractère  $\lambda$  qui est trivial dans [8] 5.3 et la torsion  $m_j/2$  de [8] 5.3.

On remarque que la représentation (1) est une représentation ayant de la cohomologie pour un bon système de coefficients, le point qui nous intéresse est que son caractère infinitésimal est celui d'une représentation de dimension finie et donc est entier régulier.

Ici  $\rho_v$  est nécessairement une induite de caractère unitaire puisque c'est une représentation de  $GL(d, \mathbb{C})$  (pour  $d$  convenable) composante locale d'une représentation cuspidale et ayant un caractère infinitésimal entier régulier; régulier ne sert pas ici mais sert ci-dessous pour savoir que les  $m_i$  sont tous distincts. On écrit ces caractères sous la forme  $\chi_i(z) = (z/\bar{z})^{m_i}$  où  $i \in [1, d]$  et  $m_i \in 1/2\mathbb{Z}$ .

Ainsi  $\rho_v|^{s_0}$  est isomorphe à l'induite  $\times_{i \in [1, d]} \mu_i$  où  $\mu_i$  est un caractère de la forme  $z^{m_i + s_0} \bar{z}^{-m_i + s_0}$ . Le caractère infinitésimal de  $\rho_v|^{s_0} \times \pi_v$  est celui d'une représentation ayant de la cohomologie, par hypothèse. Ainsi l'induite pour le groupe linéaire convenable

$$\times_{i \in [1, d]} (z/\bar{z})^{m_i} (z\bar{z})^{s_0} \times_{j \in [1, k]} \text{Speh}((z/\bar{z})^{n_j}, d_j) \times_{i \in [1, d]} (z/\bar{z})^{m_i} (z\bar{z})^{-s_0}$$

a le même caractère infinitésimal qu'une représentation ayant de la cohomologie. En particulier, on a la condition de régularité :

$$\begin{aligned} m_i + s_0 &\notin [n_j + (p_j + q_j - 1)/2, n_j - (p_j + q_j - 1)/2]; \\ m_i - s_0 &\notin [n_j + (p_j + q_j - 1)/2, n_j - (p_j + q_j - 1)/2], \end{aligned} \quad (2)$$

où les intervalles sont soit formés de demi-entiers non entiers si c'est le cas des bornes soit d'entiers si les bornes sont entières.

De plus cette représentation doit contenir comme sous-quotient une induite de même type que (1) avec des  $n_j$  et des  $d_j$  qui sont modifiés. Ceci a des conséquences si  $s_0 > 1/2$ ; en effet alors nécessairement pour tout  $i \in [1, d]$ , il existe  $j \in [1, k]$  tel que

$$m_i = n_j, \quad \text{et} \quad s_0 = (p_j + q_j + 1)/2. \quad (*)$$

De plus par régularité il existe un unique  $j$  tel que  $m_j = n_j$  et  $s_0 - (p_j + q_j + 1)/2 \in \mathbb{Z}$ ; il est possible que cette dernière congruence soit automatique mais cela n'a pas d'importance. Si  $s_0 = 1/2$ , la régularité du caractère infinitésimal entraîne que pour tout  $i \in [1, d]$  et pour tout  $j \in [1, k]$ ,  $m_j - n_j - (p_j + q_j - 1)/2 \notin \mathbb{Z}$ .

Ayant explicité cela, on revient au caractère  $\nu$  introduit ci-dessus et on note  $\ell_0$  le plus grand entier (s'il existe) tel que pour  $j$  et  $t$  tel que

$$\nu_{\ell_0} : z \mapsto z^{n_j+(p_j+q_j-1)/2-t} \bar{z}^{-n_j+(p_j+q_j-1)/2-t}$$

on ait l'inégalité  $s_0 < (p_j + q_j - 1)/2 - t$ . Pour démontrer le lemme, il nous suffit de démontrer que l'induite

$$\rho_v ||^{s_0} \times_{\ell} \nu_{\ell} \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0)$$

est isomorphe à l'induite

$$\times_{\ell \leq \ell_0} \nu_{\ell} \times \rho_v ||^{s_0} \times_{\ell > \ell_0} \nu_{\ell} \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0).$$

En effet, la deuxième induite est l'induite où le caractère est en position positive et elle a un unique quotient irréductible qui est l'unique (nécessairement) sous-quotient de Langlands de la première induite. En particulier il n'y a rien à démontrer si  $\ell_0$  n'existe pas. On suppose donc que  $\ell_0$  existe et on prend  $\ell \leq \ell_0$ . On fixe  $j, t$  tel que  $\nu_{\ell}$  est le caractère  $z \mapsto z^{n_j+(p_j+q_j-1)/2-t} \bar{z}^{-n_j+(p_j+q_j-1)/2-t}$ . Il faut donc vérifier que si  $s_0 < (p_j + q_j - 1)/2 - t$  alors l'induite, pour tout  $i \in [1, d]$ , pour  $GL(2, \mathbb{C})$ , des caractères  $\mu_i \times \nu_{\ell}$  est irréductible. La réductibilité de ce genre d'induite est étudié dans Jacquet-Langlands ([14]); on en redonne une démonstration utilisant les fonctions  $L$  et la théorie d'Harish-Chandra. Il faut et il suffit donc de vérifier que le composé des 2 opérateurs d'entrelacement standard évidents n'est pas nul; on voit ce composé comme une fonction méromorphe de  $s$  que l'on calcule en  $s = s_0$ . Cette fonction méromorphe, à un facteur inversible près en  $s' = 0$ , est la fonction :

$$L_v(\mu_i \nu_{\ell}^{-1}, s') L_v(\mu_i^{-1} \nu_{\ell}, -s') L_v(\mu_i \nu_{\ell}^{-1}, 1 + s')^{-1} L_v(\mu_i^{-1} \nu_{\ell}, 1 - s')^{-1}.$$

Les fonctions  $L_v$  sont réécrites en [8] 3.3.4, ce sont des fonctions  $\Gamma$  et leurs pôles sont aux entiers négatifs ou nuls. La condition de réductibilité s'écrit donc par le fait que l'un des dénominateurs a un pôle en  $s' = 0$ ; parce que cela nous servira dans la suite, on va aussi montrer que les fonctions  $L$  du numérateur n'ont pas de pôle, c'est-à-dire que l'on va montrer qu'aucune des 2 possibilités ci-dessous n'est possibles :

$$\sup(m_i + s_0 - n_j - (p_j + q_j - 1)/2 + t; -m_i + s_0 + n_j - (p_j + q_j - 1)/2 + t) \in \mathbb{Z}_{\leq 0},$$

ou

$$\sup(m_i - s_0 - n_j + (p_j + q_j - 1)/2 - t; -m_i - s_0 + n_j + (p_j + q_j - 1)/2 - t) \in \mathbb{Z}_{\leq 0};$$

la deuxième possibilité est exclue par le choix de  $\ell_0$  qui entraîne que  $(p_j + q_j - 1)/2 - t > s_0$ . Pour la première, par symétrie, on peut supposer que  $m_i - n_j \geq 0$ . Supposons que  $m_i + s_0 - n_j - (p_j + q_j - 1)/2 + t$  est un entier négatif ou nul; on sait que  $\inf(p_j, q_j) \geq 1$  pour ce choix de  $j$ . Par régularité du caractère infinitésimal, on a aussi que  $m_i + s_0 < n_j - (p_j + q_j - 1)/2$  (cf. (2)); d'où  $s_0 < n_j - m_i - (p_j + q_j - 1)/2 < 0$  ce qui contredit le fait que  $s_0$  est supposé strictement positif. Cela termine la preuve de l'assertion.

Remarquons pour la suite, que l'opérateur d'entrelacement standard entre les 2 induites écrites ci-dessus est holomorphe : en effet avec les notations qui précèdent, on vient de vérifier que pour tout  $i \in [1, d]$  et pour tout  $\ell \leq \ell_0$ , le composé des 2 opérateur d'entrelacement standard dans  $GL(2, \mathbb{C})$  :

$$\mu_i ||^s \times \nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell} \times \mu_i ||^s \rightarrow \mu_i ||^s \times \nu_{\ell}$$

est holomorphe inversible en  $s = 0$ . Or le 2e opérateur est holomorphe en  $s = 0$  par positivité et donc nécessairement non nul. Par irréductibilité, il est inversible et son inverse est le premier opérateur en  $s = 0$  à un scalaire (non nul) près. Le premier opérateur est donc aussi holomorphe inversible en  $s = 0$ .

Ceci termine la preuve du lemme 1.

On a aussi besoin d'une réciproque. Inversement soit  $\pi'_v$  une représentation du groupe unitaire de la forme correspondant à  $G'$  mais où on a ajouté  $d$  plans hyperboliques; on a donc augmenté le rang du groupe de  $d$ . On suppose que  $\pi'_v$  a de la cohomologie; d'où un groupe de Levi  $L'$  avec un caractère  $\lambda'$  ( $L'$  est uniquement déterminé aux facteurs compacts près). On fixe  $\rho_v, s_0$  comme ci-dessus; on écrit  $L' = \times_{j \in [1, k']} U(p'_j, q'_j)$ ; en tenant compte de la torsion comme expliqué dans la preuve ci-dessus,  $\lambda'$  fournit un produit de caractères unitaires ou encore une collection de demi-entier  $n_j$  pour  $j \in [1, k']$  (cf. la preuve ci-dessus). On a encore les demi-entiers  $m_i$  pour  $i \in [1, d]$  comme ci-dessus qui viennent de la représentation  $\rho_v$ .

**Condition locale archimédienne.**

On dit que  $\pi'_v$  est un  $\rho_v, s_0$  quotient si pour tout  $i \in [1, d]$  il existe  $j \in [1, k']$  tel que  $m_i = n_j$  et  $s_0 = (p'_j + q'_j - 1)/2$  et, pour un tel  $j$ ,  $\inf(p'_j, q'_j) > 1$ .

On peut essayer d'exprimer de façon plus intuitive cette condition; on revient à la représentation  $\pi_v^{GL}$  qui paramétrise le paquet d'Arthur qui nous intéresse; c'est une induite d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi convenable,  $M'$ . La première condition revient uniquement à dire, que  $\pi_v^{GL}$  est le quotient d'une induite de la forme

$$\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v^{GL} \times \rho_v ||^{-s_0}, \tag{3}$$

où  $\pi_v^{GL}$  est aussi une induite d'un caractère unitaire d'un sous-groupe de Levi convenable. Dans ce cas  $\pi_v^{GL}$  détermine un paquet de représentations nécessairement cohomologiques de  $G$  et il y a une inclusion assez naturelle de ce paquet de représentations dans le paquet de représentations déterminées par  $\pi_v^{GL}$ ; dans les notations de la preuve ci-dessus, à un couple  $L, \lambda$  on associe le couple  $L', \lambda'$  où  $L'$  se déduit de  $L$  en changeant certains facteurs  $U(p_j, q_j)$  en  $U(p_j + 1, q_j + 1)$  et en étendant  $\lambda$  en  $\lambda'$  de la seule façon possible; le caractère  $\lambda$  tordu comme il faut est la restriction évidente de  $\lambda'$  tordu comme il faut. Pour savoir quels sont les facteurs qui doivent être modifiés, ce sont correspondant à un indice  $j$  tel qu'il existe  $i$  avec  $m_i = n_j$ . La condition locale archimédienne dit alors que  $\pi'_v$  est dans l'image de cette inclusion.

On rappelle qu'Arthur et Adams-Johnson ont associé à chaque élément du paquet défini par  $\pi_v^{GL}$  un caractère d'un groupe fini. Ce groupe fini s'identifie ici aux éléments du centre de  $M' = \times_{j \in [1, k']} GL(d'_j, \mathbb{C})$  qui sont invariant par l'automorphisme  $g \mapsto {}^t g^{-1}$ . Ce caractère est donc une collections de  $k'$  signes correspondant à chacun des facteurs. Après permutation éventuelle, on suppose que les facteurs à modifier pour passer de  $\pi_v^{GL}$  à  $\pi'_v$  correspondent aux  $d$  premiers facteurs. La condition local archimédienne ne se voit pas sur le caractère d'Arthur sauf dans le cas où  $s_0 = 1/2$ . Dans ce cas elle est exactement équivalente à ce que les  $d$  facteurs de  $L'$  déterminé par  $\rho_v$  soient tous isomorphes à  $U(1, 1)$  et cela se voit sur le signe; si on suit [3] on trouve alors +.

Pour le lemme ci-dessous, on utilise les notations qui viennent d'être introduites :

on suppose que  $\pi_v^{GL}$  est défini par (3), cette représentation est alors uniquement définie;

si  $\pi'_v$  vérifie la condition locale archimédienne, on définit  $\pi_v$  comme représentation de  $G$  ayant de la cohomologie associé à  $L, \lambda$  où  $L$  se déduit de  $L'$  en remplaçant chaque facteur  $U(p'_j, q'_j)$  tel qu'il existe  $i \in [1, d]$  tel que  $m_i = n_j$ , par  $U(p'_j - 1, q'_j - 1)$  et  $\lambda$  s'obtient de façon évidente. On a alors :

**Lemme 2.** *Il existe une représentation irréductible  $\sigma$  de  $G(k_v)$  dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$ , tel que  $\pi'_v$  soit un quotient de  $\rho_v ||^{s_0} \times \sigma$  si et seulement si  $\pi'_v$  est un  $\rho_v, s_0$  quotient et alors  $\sigma_v \simeq \pi_v$ .*

La représentation  $\sigma_v$  a nécessairement de la cohomologie et on applique le lemme 1 pour caractériser le quotient de  $\rho_v ||^{s_0} \times \sigma_v$ . Ce quotient ne peut être  $\pi'_v$  avec les données décrites que si  $\sigma_v$  est la

représentation  $\pi_v$  décrite. Cela prouve le lemme.

On peut résumer les 2 assertions que l'on vient de démontrer de la façon suivante : on continue de fixer  $\pi_v^{GL}$  et  $\pi_v'^{GL}$  en supposant que (3) soit vérifié. On note  $\mathcal{C}_{\rho_v, s_0}$  les couples  $(\pi_v, \pi_v')$  tel que  $\pi_v$  soit dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$ ,  $\pi_v'$  dans celui défini par  $\pi_v'^{GL}$  et tels que  $\pi_v'$  soit un quotient de l'induite  $\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v$ . Alors  $\mathcal{C}_{\rho_v, s_0}$  est un graphe en bijection via la première projection avec le paquet de représentation défini par  $\pi_v^{GL}$ . Et on dit que  $\pi_v'$  est un  $\rho_v, s_0$  quotient si cette représentation est dans l'image de la 2e projection.

En général la première projection n'a aucune raison d'être surjective sur le paquet défini par  $\pi_v'^{GL}$  mais hormi ce point (qui n'est pas de détail) la situation est, à mon avis, générale.

### 3.2 Opérateurs d'entrelacements et représentations cohomologiques

On reprend les hypothèses de 3.1 ainsi que les notations  $L := \times_{j \in [1, k]} U(p_j, q_j)$ ,  $m_i$  pour  $i \in [1, d]$  et  $n_j$  pour  $j \in [1, k]$  qui décrivent complètement  $\rho_v$  et  $\pi_v$ ; quand on décrit les caractères  $\lambda$ , on inclut toujours la torsion. On note  $L_+$  le produit de groupes unitaires qui s'obtient de la façon suivante : si  $s_0 > 1/2$ ,  $L_+ = \times_{j \in [1, k]} U(p_i + \eta_i, q_i + \eta_i)$  où  $\eta_i = 0$  si  $n_j \neq m_i$  et 1 sinon. Si  $s_0 = 1/2$ , alors  $L_+ = \times_{i \in [1, d]} U(1, 1) \times L$ . On construit aussi un caractère  $\lambda_+$  de  $L_+$ ; si  $s_0 > 1/2$ , c'est essentiellement  $\lambda$  et si  $s_0 = 1/2$ , on fait le produit tensoriel de  $\lambda$  sur  $L$  avec sur chaque facteur  $U(1, 1)$  indexé par  $i \in [1, d]$  le caractère  $(\det/\bar{\det})^{m_i}$ .

**Corollaire.** *Sous les hypothèses faites, la représentation  $\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v$  a pour unique quotient irréductible la représentation,  $\pi_+$ , associée à  $L_+$  et  $\lambda_+$ . L'opérateur d'entrelacement standard :*

$$\rho_v ||^s \times \pi_v \rightarrow \rho_v ||^{-s} \times \pi_v$$

est holomorphe en  $s = s_0$  d'image  $\pi_+$ .

L'unicité du quotient irréductible a été démontrée en 3.1. Dans la preuve on a précisément donné les paramètres de Langlands de ce quotient irréductible et ce sont ceux de  $\pi_+$ . D'où la première assertion.

Dans la preuve de 3.1, on a introduit l'induite  $\times_{j \in [1, k]} \nu_j \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0)$  dont  $\pi_v$  est le quotient de Langlands; on a aussi introduit l'entier  $\ell_0$  et montrer que l'opérateur d'entrelacement standard induit un isomorphisme entre les induites :

$$\rho_v ||^{s_0} \times_{\ell} \nu_{\ell} \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0) \rightarrow \tag{1}$$

$$\times_{\ell \leq \ell_0} \nu_{\ell} \times \rho_v ||^{s_0} \times_{\ell > \ell_0} \nu_{\ell} \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0) \tag{2}$$

Par la théorie du quotient de Langlands on sait que les opérateurs d'entrelacement standard défini à partir de l'induite (2) sont holomorphes. L'opérateur d'entrelacement standard de l'induite (1) vers l'induite

$$\rho_v ||^{-s_0} \times_{\ell} \nu_{\ell} \times A_{\mathfrak{q}_0}(\lambda_0). \tag{3}$$

est le composé de l'opérateur d'entrelacement standard de l'induite (1) vers l'induite (2) avec l'opérateur d'entrelacement standard de l'induite (2) vers l'induite (3).

Cet opérateur est donc holomorphe; par passage au quotient, il induit l'opérateur de l'énoncé. Cet opérateur est donc lui aussi holomorphe. On a vérifié que la représentation  $\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v$  a un unique quotient irréductible; par dualité (hermitienne) cela entraîne que la représentation  $\rho_v ||^{-s_0} \times \pi_v$  a un unique sous-module irréductible qui est nécessairement isomorphe à  $\pi_+$ . L'unicité de  $\pi_+$  comme sous-quotient irréductible dans chacune des induites entraîne alors que l'image de l'opérateur d'entrelacement standard est précisément  $\pi_+$ .

### 3.3 Opérateurs d'entrelacements normalisés et représentations cohomologiques

On suppose toujours que  $G$  est un groupe unitaire et que  $\pi^{GL}$  a de la cohomologie à l'infini ; on a décrit la normalisation des opérateurs d'entrelacement qui intervient dans le calcul des résidus de séries d'Eisenstein. Cette normalisation ne dépend pas de  $\pi_v$  mais de  $\pi_v^{GL}$ . On garde les notations des paragraphes précédents,  $\pi_v$  est associé à  $L \simeq \times_{j \in [1, k]} U(p_j, q_j)$  et un caractère unitaire  $\lambda$  et  $\pi_v^{GL}$  est la représentation induite à partir d'un sous-groupe parabolique standard de Levi  $\times_{j \in [1, k]} GL(p_j + q_j, \mathbb{C})$  et du caractère unitaire  $\otimes_{j \in [1, k]} (det/\bar{det})^{n_j}$ , où la collection des  $n_j$  décrit  $\lambda$ . On note par abus  $\lambda_j$  le caractère  $z \mapsto (z/\bar{z})^{n_j}$ . La normalisation pour l'opérateur d'entrelacement :

$$\rho_v ||^s \times \pi_v \rightarrow \rho_v ||_v^{-s}$$

est alors, par la définition de la section 2, (à un facteur  $\epsilon$  près) le produit pour tout  $j \in [1, k]$

$$r_j(s) := L_v(\rho_v \otimes \lambda_j, s - (p_j + q_j - 1)/2) / L_v(\rho_v \otimes \lambda_j, s + (p_j + q_j + 1)/2)$$

avec la fonction  $L_v(\rho_v, r_G, 2s) / L_v(\rho_v, r_G, 2s + 1)$ .

On suppose que la représentation induite pour le groupe linéaire convenable

$$\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v^{GL} \times \rho_v ||^{-s_0}$$

admet un quotient irréductible ayant de la cohomologie.

**Lemme.** *Pour tout  $j \in [1, k]$  comme ci-dessus, la fonction méromorphe  $r_j(s)$  est holomorphe non nul en  $s_0$ . Il en est de même du facteur  $L_v(\rho_v, r_G, 2s) / L_v(\rho_v, r_G, 2s + 1)$*

Le dénominateur est, par positivité, holomorphe non nul en  $s_0$ . Pour le numérateur un pôle ne peut apparaître en  $s = s_0$  que si  $s_0 \leq (p_j + q_j - 1)/2$  ; c'est le cas que l'on a déjà considéré dans la preuve de 3.1 où on a prouvé l'holomorphie. Le dernier facteur n'a pas plus de pôles ou de zéros que le facteur  $L(\rho_v \times \rho_v, 2s_0) / L(\rho_v \times \rho_v, 2s_0 + 1)$ . L'assertion résulte de la positivité de  $s_0$ .

**Corollaire 1.** *L'opérateur d'entrelacement normalisé par voie globale de  $\rho_v ||^s \times \pi_v$  dans  $\rho_v ||^{-s} \times \pi_v$  est holomorphe en  $s = s_0$ , non nul et d'image  $\pi_+$  (définie dans 3.2).*

C'est un corollaire immédiat du lemme précédent et de 3.2

D'autres opérateurs d'entrelacement sont à considérer quand on calcule les termes constants des séries d'Eisenstein associées à l'induite  $\rho ||^s \times \pi$ . On a vu ceux qui vont intervenir pour le calcul des résidus dans 2.3 et la normalisation associée.

**Corollaire 2.** *L'opérateur d'entrelacement normalisé par voie globale de 2.3 est holomorphe en  $s = s_0$ . Si son image est semi-simple et non nulle alors elle est réduite à  $\pi_+$ .*

La première partie du corollaire se démontre comme ci-dessus. La deuxième partie du corollaire vient de l'unicité du quotient irréductible dans 3.1. Je suppose que la non nullité est toujours vérifiée mais cela ne nous importe pas. Comme nous avons démontré que les résidus des séries d'Eisenstein en  $s = s_0$  (quand il y a un pôle) sont inclus dans l'ensemble des formes automorphes de carré intégrable, la semi-simplicité sera automatique, pour les opérateurs d'entrelacements globaux ont un pôle en  $s = s_0$  mais n'est certainement pas vraie sans cette condition de pôle.

### 3.4 Le cas des places scindées pour les groupes unitaires

Ici on continue de supposer que le groupe est unitaire et on se place en une place  $v$  où l'extension  $k'/k$  est scindée. On note  $v_1$  et  $v_2$  les places de  $k'$  correspondantes et  $k'_{v'}$  la complétion pour l'une ou l'autre de ces places ; on a donc une représentation  $\pi_v^{GL}$  qui est le produit de 2 représentations  $\pi_{v_1}^{GL} \times \pi_{v_2}^{GL}$  que le groupe de Galois échange ; en fait ces 2 représentations sont isomorphes, on note légitimement,  $\pi_{v'}^{GL}$  cette représentation de  $GL(k'_{v'})$ . En une telle place  $v$ , le groupe unitaire après complétion devient isomorphe à  $GL(k'_{v'})$ . Ici, nous avons donc à considérer des induites

$$\rho_{v'} ||^s \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s}. \quad (1)$$

Mais  $\pi_{v'}$  n'est autre que  $\pi_{v'}^{GL}$ . Pour les groupes unitaires, les fonctions  $L$  intervenant dans le facteur de normalisation dépendent des places de  $k'$  au dessus de la place  $v$ . Plus précisément considérons l'opérateur qui inverse les 2 copies de  $\rho_{v'}$  :

$$\rho_{v'} ||^s \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s} \rightarrow \rho_{v'} ||^{-s} \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^s. \quad (2)$$

La normalisation mise est

$$\frac{L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s)^2}{L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s+1)^2} \times \frac{L_v(\rho_{v'}, r_G, 2s)}{L_v(\rho_{v'}, r_G, 2s+1)};$$

or en  $s > 0$  le facteur local  $L_v(\rho_{v'}, r_G, 2s)$  n'a certainement ni zéro ni pôle et peut être remplacé par  $L_{v'}(\rho_{v'} \times \rho_{v'}, s)$ , ce que nous ferons.

Or ce facteur de normalisation se calcule comme produit des trois facteurs décrits ci-dessous :  
le facteur  $L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s)/L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s+1)$  qui normalise l'opérateur

$$\rho_{v'} ||^s \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s} \rightarrow \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^s \times \rho_{v'} ||^{-s}$$

le facteur  $L_{v'}(\rho_{v'} \times \rho_{v'}, 2s)/L_{v'}(\rho_{v'} \times \rho_{v'}, 2s+1)$  qui normalise l'opérateur

$$\pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^s \times \rho_{v'} ||^{-s} \rightarrow \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s} \times \rho_{v'} ||^s$$

et encore le facteur  $L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s)/L_{v'}(\rho_{v'} \times \pi_{v'}^{GL}, s+1)$  qui normalise l'opérateur :

$$\pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s} \times \rho_{v'} ||^s \rightarrow \rho_{v'} ||^{-s} \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^s.$$

On a étudié en détail les opérateurs d'entrelacement normalisés pour ces induites en [31] I.8 (ii) et montré que pour  $s = s_0 > 0$  ces opérateurs normalisés sont holomorphes.

Donc le cas des places scindées est déjà connu au moins pour cet opérateur, il est holomorphe.

On démontre l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement décrits en 2.3 de façon analogue.

Pour terminer, on remarque qu'ici il n'y a pas de difficulté avec la nullité éventuelle des opérateurs d'entrelacement normalisés ni pour le calcul de leur image quand cette image est semi-simple. En effet, pour  $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ , la représentation :  $\rho_{v'} ||^{s_0} \times \pi_{v'}^{GL} \times \rho_{v'} ||^{-s_0}$  a un unique quotient irréductible qui est le sous-quotient de Langlands de cette induite ; cela se démontre comme dans 3.5.1 qui démontre un cas plus difficile puisque  $G$  n'est pas (en loc.cite) le groupe linéaire. Cela règle la question de l'image quand celle-ci est semi-simple non nulle. Au passage si  $s_0$  est tel que  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ , le sous-quotient de Langlands n'est autre que  $\text{Speh}(\rho_{v'}, 2s_0 + 1) \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); (\rho', b') \neq (\rho, 2s_0 - 1)} \text{Speh}(\rho'_{v'}, b')$ .

Pour la non nullité de l'opérateur (2) quand  $s_0$  est tel que  $(\rho, 2s_0 - 1) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ , on renvoie à la démonstration de 3.5.3. La non nullité est vraie dès que  $s_0 \geq 0$  mais nous n'en avons pas besoin.

### 3.5 Opérateurs d'entrelacement normalisés pour les représentations dans le paquet de Langlands inclus dans le paquet d'Arthur.

#### 3.5.1 Holomorphie aux places finies

Ici on ne suppose plus que  $G$  est un groupe unitaire, on revient à notre groupe classique. Mais on se place en une place finie. On voit un paquet d'Arthur comme une représentation irréductible un peu particulière d'un groupe linéaire ; pour simplifier, on oublie que la conjecture de Ramanujan n'est pas connue comme expliqué dans l'introduction, les représentations supplémentaires qui apparaissent n'induisent aucune difficulté supplémentaires. Donc on écrit la représentation du groupe linéaire sous la forme d'une induite

$$\times_{(\tau,a,b) \in \mathcal{T}} \text{Speh}(St(\tau, a), b) \quad (1)$$

où le produit porte sur des triplets  $(\tau, a, b)$  où  $\tau$  est une représentation cuspidale unitaire et  $a, b$  sont des entiers. La représentation  $\text{Speh}(St(\tau, a), b)$  est l'unique sous-représentation irréductible basée sur  $\rho$  et associée via les travaux de Zelevinsky à la collection de segments

$$\begin{array}{ccc} (a-b)/2 & \cdots & (a+b)/2 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a+b)/2 + 1 & \cdots & -(a-b)/2 \end{array}$$

Les segments sont croissants sur les lignes et décroissants sur les colonnes. C'est une représentation de Speh de taille  $b$  construite avec la Steinberg associée à  $\tau$  et à l'entier  $a$ . On sait que l'induite (1) est irréductible (cf. [31] p. 622) et l'ordre des facteurs n'importe donc pas.

Pour décrire le paquet de Langlands inclus dans le paquet d'Arthur associé à cette collection de triplets, on forme la représentation tempérée d'un groupe linéaire de rang plus petit

$$\times_{(\tau,a,b) \in \mathcal{T}; (-1)^b = -1} St(\tau, a). \quad (2)$$

Dès que l'on a le lemme fondamental tordu, avec [43], on peut définir la notion de transfert. Il est facile de vérifier (cf. par exemple [30]) que le transfert commute assez bien au module de Jacquet et on vérifie comme dans loc. cite que (1) ne peut être obtenu comme transfert que si (2) est lui aussi obtenu comme transfert. Cela impose une condition de parité sur les entiers  $a$  et  $b$ , parité dépendant de  $\tau$  qu'il n'est pas utile d'expliciter.

Avec en plus le lemme fondamental ordinaire (cf. [25]), on sait alors associer à une telle représentation (2) un paquet de représentations tempérées d'un groupe de même type que  $G$  (de rang en général plus petit) tel qu'une bonne combinaison linéaire (à coefficients tous non nuls) de ces représentations ait un caractère qui se transfère en le caractère de (2). Cela détermine uniquement le paquet de représentation.

On note  $\Pi_{temp}$  ce paquet de représentation tempérées ; c'est un paquet de Langlands. On obtient alors le paquet de Langlands associé à (2), en prenant les sous-quotients de Langlands des induites :

$$\times_{(\tau,a,b) \in \mathcal{T}, b > 1, y \in [(b-1)/2, \delta_b]} St(\tau, a) \Big| \Big|^y \times \pi_{temp}, \quad (3)$$

où  $\pi_{temp}$  parcourt  $\Pi_{temp}$  et où, pour tout  $b$ ,  $\delta_b = (b-1)/2 - [b/2] + 1$  (c'est-à-dire  $\delta_b = 1$  si  $b$  est impair et  $\delta_b = 1/2$  si  $b$  est pair). On note ici, pour  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}$  avec  $b > 1$ ,  $\text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b)$  l'unique quotient irréductible de l'induite (pour un groupe linéaire convenable)  $\times_{y \in [(b-1)/2, \delta_b]} St(\tau, a) \Big| \Big|^y$ . Le sous-quotient de Langlands de (3) est aussi l'unique quotient irréductible de l'induite

$$\times_{(\tau,a,b) \in \mathcal{T}, b > 1} \text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b) \times \pi_{temp}; \quad (4)$$

pour arriver à cette assertion, on vérifie que (4) est un quotient de (3) mis en position positive : on reviendra sur cette assertion en montrant une plus générale dans 3.6. On remarque aussi que la

représentation du groupe linéaire convenable  $\times_{(\tau,a,b) \in \mathcal{T}, b > 1} \text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b)$  est irréductible d'après [31] (page 622) et l'ordre des facteurs n'importe donc pas.

Soient  $\rho$  une représentation cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire,  $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de carré intégrable de  $G$  et  $\pi^{GL}$  la représentation automorphe du groupe linéaire convenable associé.

**Proposition.** *Soit  $v$  une place finie. On suppose que  $\pi_v$  est dans le paquet de Langlands correspondant à la représentation  $\pi_v^{GL}$  comme expliqué ci-dessus. L'opérateur d'entrelacement normalisé par voie globale*

$$\rho_v ||^s \times \pi_v \rightarrow \rho_v ||^{-s} \times \pi_v$$

est holomorphe en  $s = s_0$ .

On utilise le fait que par hypothèse,  $\pi_v$  est un quotient irréductible de l'induite (3) et on décompose l'opérateur d'entrelacement en produit d'opérateur d'entrelacement élémentaire.

Soit  $(\tau, a, b)$  comme ci-dessus et  $\tau_0, a_0, s_0$  avec  $s_0 > 0$ ; on a étudié en [31] 1.6.3 l'opérateur d'entrelacement standard, pour le groupe linéaire convenable :

$$St(\tau_0, a_0) ||^s \times \text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b) \rightarrow \text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b) \times St(\tau_0, a_0) ||^s.$$

En loc. cite, on a étudié l'opérateur d'entrelacement normalisé et on a montré que l'opérateur normalisé est holomorphe non nul en  $s = s_0$ . Cela entraîne que l'opérateur d'entrelacement standard pour pôles en  $s = s_0$  exactement ceux de la fonction qui est le facteur de normalisation

$$L_v(St(\tau_0, a_0) \times St(\tau, a), s - (b-1)/2) / L_v(St(\tau_0, a_0) \times St(\tau, a), s - \delta_b + 1).$$

Le dénominateur de cette fonction n'a ni zéro ni pôle en  $s = s_0$  car  $s_0$  est positif alors que  $\delta_b \leq 1$ . Le numérateur est exactement la fonction qui intervient au numérateur de la normalisation par voie globale. Donc ses pôles éventuels sont pris en compte par notre normalisation. A l'inverse tous les pôles de la normalisation globale sont pris en compte par ces normalisations partielles quand on fait varier les données.

On a ensuite à considérer l'opérateur d'entrelacement

$$St(\tau_0, a_0) ||^s \times \pi_{temp} \rightarrow St(\tau_0, a_0) ||^{-s} \times \pi_{temp}.$$

L'opérateur d'entrelacement standard est holomorphe en  $s = s_0$  par positivité stricte de  $s_0$ . Il reste encore les opérateurs de la forme

$$\text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b) \times St(\tau_0, a_0) ||^{-s} \rightarrow St(\tau_0, a_0) ||^{-s} \times \text{Speh}(St(\tau, a), (b-1)/2, \delta_b).$$

Cet opérateur d'entrelacement est holomorphe en  $s = s_0$  par positivité de  $s_0$ . On a ainsi démontré que les pôles de l'opérateur d'entrelacement standard sont inclus dans ceux du facteur de normalisation; on a donc certainement démontré l'holomorphie annoncée. On montrera la non nullité dans la section suivante.

### 3.5.2 Le cas des places archimédiennes

Ici on se limite au cas des groupes symplectiques ou orthogonaux quasidéployés.

La difficulté aux places archimédiennes est que, hormi le cas déjà traité, on ne connaît pas les paquets d'Arthur, on va donc admettre que le paquet d'Arthur contient le paquet de Langlands, cela fait partie du yoga d'Arthur mais je n'en ai pas vu de démonstration; l'argument que j'ai donné pour les places non archimédiennes utilise les modules de Jacquet, aux places archimédiennes il faut un autre

argument, les multiplicateurs (?), mais je n’y connais rien. Donc ici  $v$  est une place archimédienne ; on a la représentation globale de carré intégrable  $\pi$  d’où la représentation  $\pi^{GL} = \times_{(\rho,b)} Speh(\rho, b)$  du groupe linéaire convenable. On suppose la conjecture de Ramanujan (pour simplifier) et on a donc comme composante en  $v$

$$\pi_v^{GL} = \times_{\delta,b} Speh(\delta, b)$$

où les  $\delta$  sont des séries discrètes unitaires de  $GL(2, \mathbb{R})$  ou des caractères unitaires de  $GL(1, \mathbb{C})$  ou  $GL(1, \mathbb{R})$ . Pour tout entier  $b$  on définit encore  $\delta_b = 1$  si  $b$  est impair et  $\delta_b = 1/2$  si  $b$  est pair ; on reprend aussi la notation  $Speh(\delta, (b-1)/2, \delta_b)$  pour le quotient de Langlands (dans le groupe linéaire convenable) de l’induite  $\times_{j \in [(b-1)/2, \delta_b]} \delta | \cdot |^j$ . On admet que la  $\theta$  trace de la représentation  $\times_{\delta, b \equiv 1[2]} \delta$  est un transfert endoscopique tordu d’un paquet de représentation tempéré, noté  $\Pi_{temp}$  et on appelle paquet de Langlands dans le paquet d’Arthur l’ensemble des sous-quotients de Langlands des représentations induites :

$$\times_{\delta, b > 1} \times_{j \in [(b-1)/2, \delta_b]} \delta | \cdot |^j \times \pi_{temp}$$

où  $\pi_{temp}$  parcourt l’ensemble des représentations dans  $\Pi_{temp}$ . On montre alors que ce sous-quotient de Langlands est l’unique quotient irréductible de la représentation

$$\times_{\delta, b > 1} Speh(\delta, (b-1)/2, \delta_b) \times \pi_{temp};$$

pour cela il faut utiliser [31] 1.7 au lieu de [31] 1.6. Ici aussi le facteur  $\times_{\delta, b > 1} Speh(\delta, (b-1)/2, \delta_b)$  est une représentation irréductible du groupe linéaire convenable ([31] 1.9) et il n’est pas utile de préciser l’ordre des facteurs. Et on a aussi

**Proposition.** *Soient  $\rho, s_0, \pi, \pi^{GL}$  comme précédemment. On suppose que  $\pi_v$  est dans le paquet de Langlands correspondant à la représentation  $\pi_v^{GL}$  comme expliqué ci-dessus. L’opérateur d’entrelacement normalisé par voie globale*

$$\rho_v | \cdot |^s \times \pi_v \rightarrow \rho_v | \cdot |^{-s} \times \pi_v$$

est holomorphe en  $s = s_0$ .

C’est le raisonnement du cas non archimédien : pour les opérateurs qui ne sont pas dans un groupe linéaire on utilise la positivité et pour ceux qui sont dans  $GL$  on utilise [31] 1.8.

### 3.5.3 Image des opérateurs d’entrelacement normalisés

On revient à  $\pi$  une représentation automorphe de carré intégrable irréductible de  $G$ , d’où  $\pi^{GL}$  et  $Jord(\pi^{GL})$ . On fixe  $s_0$  un demi-entier strictement positif et on suppose que  $(\rho, 2s_0 - 1) \in Jord(\pi^{GL})$ . On considère la représentation automorphe

$$\pi_{+}^{GL} := \times_{(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL}) - \{(\rho, 2s_0 - 1)\}} Speh(\rho', b') \times Speh(\rho, 2s_0 + 1);$$

cela définit des paquets locaux. On fixe une place  $v$  et  $\pi_v$  dans le paquet de Langlands comme en 3.5.1 et 3.5.2 ; on a représenté  $\pi_v$  comme un quotient de Langlands uniquement déterminé quand on a fixé la représentation  $\pi_{temp}$ . A cette représentation  $\pi_{temp}$  on associe aussi une représentation du paquet de Langlands de  $\pi_{+,v}^{GL}$  en suivant exactement les constructions de ces références. On note  $\pi_{+,v}$  cette représentation.

**Proposition.** *L’image de l’opérateur des propositions de 3.5.1 et 3.5.2 est exactement la représentation du paquet de Langlands  $\pi_{+,v}$  du paquet associé à  $\pi_{+,v}^{GL}$ .*

Pour démontrer la proposition, on récrit l’induite 3.5.1 (4) (et son analogue archimédien) en ordonnant les facteurs

$$\times_{(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} Speh(\rho', (b' - 1)/2, \delta_{b'})$$

$$\times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' < 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \pi_{temp}. \quad (1)$$

On décompose l'opérateur d'entrelacement standard qui nous intéresse, en le produit des 2 opérateurs d'entrelacement standard suivants :

$$\begin{aligned} & \rho_v | |^s \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \\ & \rightarrow \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \rho_v | |^s \end{aligned} \quad (2)$$

et

$$\begin{aligned} & \rho_v | |^s \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' < 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \pi_{temp} \\ & \rightarrow \rho_v | |^{-s} \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL})} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \pi_{temp}. \end{aligned}$$

On a vu que le deuxième opérateur est holomorphe. Le premier a exactement comme pôle les pôles de la normalisation et quand on a enlevé ces pôles, il devient un isomorphisme. Ainsi l'opérateur qui nous intéresse est le composé d'un isomorphisme avec un opérateur d'entrelacement standard holomorphe. Un opérateur d'entrelacement standard holomorphe n'est pas nul. Donc l'opérateur d'entrelacement normalisé sur toute l'induite n'est pas nul.

Dans la construction, on voit que l'image de l'opérateur est un quotient de l'induite :

$$\begin{aligned} & \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \text{Speh}(\rho_v, 2s_0 + 1, \delta_{2s_0 + 1}) \\ & \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' < 2s_0 + 1; (\rho', b') \neq (\rho, 2s_0 - 1)} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \pi_{temp}. \end{aligned} \quad (3)$$

Mais cette induite est en position dominante et a un unique quotient irréductible précisément  $\pi_{+,v}$  et  $\pi_{+,v}$  n'intervient qu'avec multiplicité 1 comme sous-quotient de toute l'induite

$$\rho_v | |^{s_0} \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL})} \text{Speh}(\rho'_v, (b' - 1)/2, \delta_{b'}) \times \pi_{temp}.$$

L'unicité du quotient irréductible de (3) assure déjà que ce quotient  $\pi_{+,v}$  n'est pas dans le noyau de l'opérateur d'entrelacement considéré; on note  $X$  le sous-module de (1) tel que  $\pi_v$  soit le quotient de (1) par  $X$ . En utilisant le fait que l'opérateur (2) est un isomorphisme en  $s = s_0$  quand on a enlevé ses pôles grâce à la normalisation, on vérifie en fait que l'induite  $\rho_v | |^{s_0} \times (1)$  a elle aussi un unique quotient irréductible,  $\pi_{+,v}$ . Mais ainsi  $\pi_{+,v}$  n'est pas un sous-quotient de  $\rho_v | |^{s_0} \times X$  (par multiplicité 1 en tant que sous-quotient irréductible). Ainsi quand on passe au quotient par  $\rho_v | |^{s_0} \times X$  l'opérateur d'entrelacement reste non nul. Ainsi on vient déjà de prouver la non nullité de l'opérateur d'entrelacement normalisé.

Pour savoir que son image est réduite à  $\pi_{+,v}$ , il suffit de vérifier que l'induite  $\rho_v | |^{-s_0} \times \pi_v$  a un unique sous-module irréductible. On obtient cette assertion avec des arguments duaux. On considère l'induite tel que  $\pi_v$  soit l'unique sous-module de Langlands :

$$\begin{aligned} & \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \\ & \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' < 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \times \pi_{temp}. \end{aligned} \quad (1bis)$$

On considère l'opérateur d'entrelacement standard

$$\rho_v | |^s \times (1bis) \rightarrow \rho_v | |^{-s} \times (1bis)$$

Ici on le décompose comme produit de

$$\begin{aligned} & \rho_v | |^s \times (1bis) \rightarrow \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \\ & \times \rho_v | |^{-s} \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' < 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \times \pi_{temp} \end{aligned}$$

avec l'échange

$$\begin{aligned} & \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \times \rho_v ||^{-s} \rightarrow \\ & \rho_v ||^{-s} \times_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL}); b' \geq 2s_0 + 1} \text{Speh}(\rho'_v, -\delta_{b'}, -(b' - 1)/2) \end{aligned}$$

Le premier opérateur est holomorphe comme opérateur d'entrelacement standard et le deuxième devient une bijection quand on en a enlevé les pôles éventuels grâce précisément aux facteurs de normalisation. Ainsi  $\rho ||^{-s_0} \times$  (1bis) a  $\pi_{+,v}$  comme unique sous-module irréductible. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \rho_v ||^s \times (1) & \rightarrow & \rho_v ||^{-s} \times (1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_v ||^s \times (1\text{bis}) & \rightarrow & \rho_v ||^{-s} \times (1\text{bis}) \end{array},$$

où les flèches verticales sont le passage au quotient par  $X$ . Ainsi l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé de l'énoncé a  $\pi_{+,v}$  comme unique quotient irréductible et comme unique sous-module irréductible. Par multiplicité 1 cette image est donc réduite à  $\pi_{+,v}$ . Cela termine la preuve.

### 3.6 Les autres opérateurs d'entrelacements dans le cas non archimédien

Rappelons d'abord le résultat suivant de [31] I.6.3 (ii) qui suppose que la place  $v$  est une place finie : on considère  $(\tau, a)$  et  $(\tau, a')$  des couples formés d'une représentation cuspidale unitaire et d'un entier. On considère aussi  $d, f$  des demi-entiers tel que  $f - d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $d', f'$  ayant la même propriété. On définit  $\text{Speh}(\text{St}(\tau, a), f, d)$  comme l'unique quotient irréductible de l'induite

$$\times_{j \in [f, d]} \text{St}(\tau, a) ||^j.$$

Et on définit de même  $\text{Speh}(\text{St}(\tau, a'), f', d')$ . L'induite  $\text{Speh}(\text{St}(\tau, a), f, d) \times \text{Sp}(\text{St}(\tau, a'), f', d')$  est irréductible pour tout choix de  $f, f', d, d'$  si  $f - f' - (a - a')/2$  n'est pas dans  $\mathbb{Z}$ , et on a montré en [31] page 622, qu'une condition suffisante pour que cette induite soit irréductible est

$$-|(a - a')/2| \leq d - d' \leq |(a - a')/2|.$$

En particulier si  $|d - d'| = 0$  ou  $1/2$  l'induite est irréductible. De plus si  $d \geq d' - |(a - a')/2|$ , l'induite a un unique quotient irréductible (qui peut être toute l'induite) qui est l'image de l'opérateur d'entrelacement normalisé à la Langlands Shahidi qui inverse les 2 facteurs de l'induite, en particulier cet opérateur est holomorphe.

Soient  $\rho_v, s_0, \pi_v$  comme dans les paragraphes précédents ; on appelle sous-quotient de Langlands de l'induite  $\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v$  le sous-quotient de Langlands de la représentation (on utilise les notations des paragraphes précédents).

$$\times_{(\tau, a) \in \text{Jord}(\rho_v)} \text{St}(\tau, a) ||^{s_0} \times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}} \times_{j \in [(b-1)/2, \delta_b]} \text{St}(\tau, a) ||^j \times \pi_{temp}. \quad (1)$$

Supposons maintenant que  $v$  est une place archimédienne ; en [31] 1.7 on a aussi défini la condition de liaison qui donne les propriétés d'irréductibilité analogue ([31] 1.9, proposition) ou unicité du quotient ([31] 1.9 (1) et (2)) avec identification au sous-quotient de Langlands.

**Lemme 1.** *Pour tout  $s_0 > 0$ , la représentation  $\rho_v ||^{s_0} \times \pi_v$  a un unique quotient irréductible et c'est le sous-quotient de Langlands.*

Le seul cas où il y a quelque chose à démontrer est celui où  $s_0$  est demi-entier, ce que nous allons supposer. Pour donner les détails, on suppose que  $v$  est non archimédien on peut traiter les 2 cas simultanément en considérant que  $\text{St}(\tau, a)$  est une série discrète de  $GL(2, \mathbb{R})$  ou un caractère unitaire de  $GL(1, k_v)$ .

On ordonne les triplets  $(\tau, a, j)$  où  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}$  et  $j \in [(b-1)/2, \delta_b]$  et on les note  $(\tau_\ell, a_\ell, j_\ell)$  pour  $\ell$  parcourant un ensemble totalement ordonné noté  $[1, m]$  de telle sorte que l'induite dont  $\pi_v$  est le quotient de Langlands soit précisément pour  $m$  convenable

$$\times_{\ell \in [1, m]} St(\tau_\ell, a_\ell) \Big|^{j_\ell} \times \pi_{temp}, \quad (2)$$

où on prend les triplets dans l'ordre. Il y a plusieurs choix possibles, on en fait un.

Soit  $t$  un demi-entier strictement positif; on note  $\ell_0$  le plus petit indice tel que pour le triplet  $(\tau_\ell, a_\ell, j_\ell)$ , on ait  $j_\ell < t$ . On va montrer que (2) admet comme quotient (non irréductible en général) l'induite

$$\times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}; (b-1)/2 \geq t} Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t + \delta'_b) \times_{\ell \in [\ell_0, m]} St(\tau_\ell, a_\ell) \Big|^{j_\ell} \times \pi_{temp}, \quad (*)$$

où  $\delta'_b$  vaut 0 si  $(b-1)/2 - t$  est un entier et  $1/2$  sinon. Cela se fait par récurrence décroissante sur  $t$ : pour  $t$  grand, il n'y a rien à démontrer. Supposons l'assertion connue pour  $t$  et montrons la pour  $t - 1/2$ . On note  $\ell_1$  l'analogue de  $\ell_0$  pour  $t$  remplacé par  $t - 1/2$ ; on remarque d'abord que pour tout  $(\tau, a, b)$  tel que  $(b-1)/2 > t$  et  $\delta'_b = 1/2$ , il existe  $\ell \in [\ell_0, \ell_1]$  tel que  $\tau_\ell = \tau$  et  $a_\ell = a$ . Avec les propriétés d'irréductibilité rappelées, on peut faire commuter ces facteurs de façon à remplacer (2) par l'induite isomorphe à (2)

$$\times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}; (b-1)/2 \geq t, \delta'_b = 0} Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t) \quad (3)$$

$$\times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}, (b-1)/2 > t, \delta'_b = 1/2} \left( Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t + 1/2) \times St(\tau, a) \Big|^{t-1/2} \right) \quad (4)$$

$$\times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}, (b-1)/2 = 1/2} Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t - 1/2) \quad (5)$$

$$\times_{\ell \in [\ell_1, m]} St(\tau_\ell, a_\ell) \Big|^{j_\ell} \times \pi_{temp}.$$

Evidemment les termes en (5) sont simplement des Steinberg tordus. On remplace maintenant chaque terme de (4) par son quotient irréductible  $Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t - 1/2)$  et cela donne l'assertion. Et on obtient donc (2) pour tout demi-entier positif  $t$ . On sait que (\*) qui est quotient de (2) a un unique quotient irréductible et que ce quotient est  $\pi_v$ .

On applique cela à  $t = s_0$  et on voit que  $\pi_v$  est quotient de (\*) pour cette valeur de  $t$ . Mais on a aussi vu que pour tout  $(\tau, a, b)$  tel que  $(b-1)/2 \geq s_0$  et pour tout  $(\tau, a) \in Jord(\rho_v)$  l'induite  $St(\tau, a) \Big|^{s_0} \times Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, s_0 + \delta_b)$  est irréductible. Ainsi l'induite  $\rho_v \Big|^{s_0} \times (*)$  est isomorphe à l'induite

$$\times_{(\tau, a, b) \in \mathcal{T}; (b-1)/2 \geq s_0} Speh(St(\tau, a), (b-1)/2, t + \delta'_b) \times \rho_v \Big|^{s_0} \times_{\ell \in [\ell_0, m]} St(\tau_\ell, a_\ell) \Big|^{j_\ell} \times \pi_{temp}. \quad (6)$$

Comme précédemment on montre que (6) est un quotient de l'induite (1) réordonnée pour avoir un unique quotient irréductible, le sous-quotient de Langlands. Ainsi (6) a un unique quotient irréductible qui est le sous-quotient de Langlands et cela prouve le lemme.

**Lemme 2.** *Les opérateurs d'entrelacements de la section 2 définis sur l'induite  $\rho_v \Big|^{s_0} \times \pi_v$  sont holomorphes en  $s = s_0$ ; si leur image est non nulle et semi-simple alors elle est réduite au sous-quotient de Langlands.*

On reprend les notations de la preuve précédente. On reprend en particulier l'induite (3) pour  $t = s_0$ . Puisque l'on normalise tout à la Langlands Shahidi, on peut remplacer  $\rho_v \Big|^{s_0} \times \pi_v$  par  $\rho_v \Big|^{s_0} \times (3)$ ; ici on utilise bien évidemment le fait que  $\pi_v$  est dans le paquet de Langlands. Ensuite pour passer de  $\rho_v \Big|^{s_0} \times (3)$  à l'induite (6) où on met  $\rho_v \Big|^{s_0}$  au lieu de  $\rho_v \Big|^{s_0}$ , on utilise un opérateur d'entrelacement normalisé à la Langlands-Shahidi, holomorphe en  $s = s_0$ . Or comme cette induite est un quotient de l'induite en position positive, n'importe quel opérateur d'entrelacement normalisé est holomorphe sur cette induite. Grâce aux propriétés de multiplicativité des opérateurs d'entrelacement normalisés, on obtient l'holomorphie de l'énoncé. La fin du lemme résulte du fait que l'induite (6) a un unique quotient irréductible qui est le sous-quotient de Langlands.

### 3.7 Un théorème simple

Ici on suppose que  $G$  est un groupe unitaire ; on rappelle que l'on a admis les conjectures d'Arthur pour les groupes unitaires bien qu'aucune démonstration ne soit disponible. Soit  $\pi$  une représentation irréductible de carré intégrable de  $G(\mathbb{A})$ . On suppose que  $\pi$  a de la cohomologie à l'infini. On fixe  $(\rho_0, b_0) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  avec  $b_0 \geq 2$  ; la régularité du caractère infinitésimal de  $\pi^{GL}$  assure alors que si  $b_0 > 2$ ,  $(\rho_0, b_0 - 2) \notin \text{Jord}(\pi^{GL})$ . On reprend la notation  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  de 1.3 qui définit un paquet de représentation de carré intégrable d'un groupe,  $G^-$ , de même type que  $G$  mais de rang plus petit ;  $G^-$  est défini en enlevant des espace isotrope à la forme unitaire définissant  $G$ .

On a défini en 3.1 la condition locale archimédienne, le  $\pi'_v$  de loc.cite sera ici  $\pi_v$ .

**Théorème.** *Soit  $\pi$  une représentation irréductible de carré intégrable de  $G(\mathbb{A})$  comme ci-dessus. On suppose que  $\pi$  a de la cohomologie à l'infini et qu'en toute place finie non scindée  $v$ , la composante locale  $\pi_v$  est sphérique. Alors  $\pi$  est non cuspidale si et seulement si il existe  $(\rho_0, b_0) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b_0 > 1$  et tel que les conditions suivantes soient satisfaites :*

*la condition globale : pour tout  $(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b' = b_0 - 1$ ,  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) \neq 0$*

*la condition locale à l'infini : en toute place  $v$  archimédienne,  $\pi_v$  est un  $\rho_{0,v}, (b_0 - 1)/2$  quotient.*

*Si ces conditions sont vérifiées, alors il existe une unique représentation automorphe irréductible de carré intégrable dans le paquet défini par  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$ , notée  $\pi^{\rho_0, b_0}$  telle que  $\pi$  se réalise dans l'espace des résidus des séries d'Eisenstein  $\left( (s - (b_0 - 1)/2) E(\rho_0 ||^s \times \pi^{\rho_0, b_0}, f_s) \right)_{s=(b_0-1)/2}$  ; cet espace de résidu est une représentation irréductible.*

En l'absence de la formule de multiplicité précise (qui n'apparaît pour l'instant dans la littérature que sous forme de conjectures) on démontre moins : exactement on construit de façon unique en toute place  $v$ ,  $\pi_v^{\rho_0, b_0}$  en imposant simplement que  $\pi_v$  est un quotient de l'induite  $\rho_{0,v} ||^{(b_0-1)/2} \times \pi_v^{\rho_0, b_0}$  et que  $\pi_v^{\rho_0, b_0}$  est dans le bon paquet d'Arthur. On admet que  $\otimes'_v \pi_v^{\rho_0, b_0}$  se réalise dans l'espace des formes automorphes de carré intégrable pour  $G^-$  et on démontre alors que l'espace des résidus de séries d'Eisenstein décrit dans l'énoncé est lui-même une représentation automorphe de carré intégrable irréductible et que cette représentation est isomorphe à  $\pi$ . Pour avoir le théorème sous la forme écrite, il suffirait par exemple de savoir que la multiplicité de  $\pi_v$  dans l'espace des formes automorphes de carré intégrable pour  $G$  est inférieure ou égal à la multiplicité de la représentation construite  $\pi^{\rho_0, b_0}$  dans l'espace des formes automorphes de carré intégrable pour  $G^-$ . Comme on s'attend à pouvoir démontrer que chacune de ces multiplicités est inférieure ou égal à 1 et que le critère pour que ce soit 1 se voit sur les signes d'Arthur uniquement aux places archimédiennes, vues les hypothèses très simplificatrices faites, (donc est le même pour  $\pi$  et  $\pi^{\rho_0, b_0}$ ) on n'a pas essayé ici de contourner le problème.

On démontre ce théorème en même temps que la proposition

**Proposition.** *Soit  $\pi$  comme dans le théorème ; on suppose que  $\pi$  est non cuspidale et soit  $\rho', s'$  tel que  $\pi[\rho', s']$  défini en 1.2.1 soit non nul. Alors pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b = 2s'$ ,  $L(\rho' \times \rho, 1/2) \neq 0$ . De plus  $\pi[\rho', s']$  est irréductible, a de la cohomologie à l'infini et est sphérique en toute place finie non scindée.*

On montre d'abord le théorème, en admettant la proposition par récurrence pour les groupes de rang strictement plus petit que  $G$ , puis on démontrera la proposition.

Supposons d'abord que  $\pi$  ne soit pas cuspidale ; on a déjà montré en 1.3, qu'il existe  $(\rho_0, b_0) \in$

$Jord(\pi^{GL})$  et une représentation,  $\sigma$ , irréductible de carré intégrable d'un groupe de même type que  $G$  dans le paquet défini par  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  telle que  $\pi$  se réalise comme sous-représentation de la représentation résiduelle  $\left( (s - (b_0 - 1)/2)E(\rho_0 | \cdot|^s \times \sigma) \right)_{s=(b_0-1)/2}$ . On connaît aussi les paquets locaux auxquels

appartiennent chaque  $\sigma_v$ ; en particulier en toute place finie scindée  $\sigma_v$  est isomorphe à  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  (il n'y a qu'un élément dans le paquet); en toute place  $v$  finie non scindée, on a supposé que  $\pi_v$  est sphérique et  $\sigma_v$  est alors aussi l'unique représentation sphérique de son paquet. En toute place  $v$  archimédienne,  $\sigma_v$  a de la cohomologie et nécessairement  $\pi_v$  est un quotient de  $\rho_{0,v} | \cdot |^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$ ; on peut alors appliquer le lemme 2 de 3.1 qui identifie  $\sigma_v$  et donne son unicité. Ainsi  $\sigma$  est bien uniquement déterminé. On a démontré que les opérateurs d'entrelacement normalisés sont holomorphes : cela a été fait en 3.3 pour les places archimédiennes et en 3.4 pour les places scindées. Aux places sphériques les opérateurs d'entrelacement normalisés sont l'identité sur le vecteur sphérique mais on sait même qu'ils sont holomorphes puisqu'une représentation sphérique est dans le paquet de Langlands associé au paquet d'Arthur et on peut donc utiliser 3.6; en fait pour le résultat que l'on cherche, on n'a pas besoin de savoir que les opérateurs n'ont pas de pôles sur toute l'induite, il suffit de le savoir sur le sous-quotient sphérique car on veut que les résidus contiennent ce sous-quotient sphérique. Donc les séries d'Eisenstein ne peuvent avoir des pôles que si l'un des facteurs globaux au moins a un pôle.

Il faut donc calculer ces facteurs globaux de normalisation; on considère d'abord l'élément du groupe de Weyl donnant le morphisme :

$$\rho_0 | \cdot |^s \times \sigma \rightarrow \rho_0 | \cdot |^{-s} \times \sigma.$$

Récrivons ce facteur en  $s = s' + (b_0 - 1)/2$  et on regarde en  $s' = 0$  :

$$\frac{L(\rho_0, r_G, 2s' + b_0 - 1)}{L(\rho_0, r_G, 2s' + b_0)} \times_{(\rho', b') \in Jord(\sigma^{GL})} \frac{L(\rho_0 \times \rho', s' + (b_0 - 1)/2 - (b' - 1)/2)}{L(\rho_0 \times \rho', s' + (b_0 - 1)/2 + (b' + 1)/2)}.$$

Les dénominateurs n'ont ni zéro ni pôle et n'interviennent donc pas. Pour les numérateurs, le facteur contenant  $r_G$  n'a de pôle en  $s' = 0$  que si  $b_0 = 2$  et il en a un nécessairement dans ce cas. Les autres facteurs donnent un pôle en  $s' = 0$  exactement quand  $\rho' \simeq \rho_0$  et  $b_0 = b' + 2$  et ce pôle est alors d'ordre 1. Comme  $Jord(\pi^{GL})$  se déduit de  $Jord(\sigma^{GL})$  en remplaçant le couple  $(\rho_0, b_0 - 2)$  qui doit être un élément de  $Jord(\sigma)$  par  $(\rho_0, b_0)$ , on voit que les numérateurs fournissent exactement un pôle d'ordre 1 pour  $(\rho', b') = (\rho_0, b_0 - 2)$ . On peut avoir des zéros, mais seulement à l'intérieur de la bande critique grâce à [37]; pour nous cela ne peut être qu'en  $1/2$  et on a un zéro s'il existe  $(\rho', b') \in Jord(\sigma^{GL})$  tel que  $b' = b_0 - 1$  et  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) = 0$ . Mais alors  $(\rho', b')$  est aussi dans  $Jord(\pi^{GL})$ . Donc pour que le facteur global écrit ait un pôle il faut exactement que la condition globale soit réalisée.

Regardons maintenant les facteurs associées aux autres opérateurs d'entrelacement. On doit considérer les termes constants de  $\sigma$ ; comme  $\sigma$  vérifie les mêmes hypothèses que  $\pi$  on peut lui appliquer la proposition par récurrence. Donc on doit regarder les opérateurs qui se factorisent d'abord par :

$$\rho_0 | \cdot |^s \times \rho | \cdot |^{-s'} \times \sigma[\rho', s'] \rightarrow \rho | \cdot |^{-s'} \times \rho_0 | \cdot |^s \times \sigma[\rho', s']$$

puis par un opérateur d'entrelacement relatif à l'induite  $\rho_0 | \cdot |^s \times \sigma[\rho', s']$ . Le premier opérateur est holomorphe pour tout  $s$  voisin de  $(b_0 - 1)/2$  puisque l'on ne peut avoir  $\rho' \simeq \rho$  et  $s' = 1/2$  si  $b_0 = 2$ . Pour avoir un pôle il faut que l'autre opérateur en ait un. On peut appliquer maintenant le théorème par récurrence; d'une part, il faut que si  $b_0 > 2$ ,  $(\rho_0, b_0 - 2) \in Jord(\sigma[\rho', s']^{GL})$  et d'autre part on a comme condition nécessaire, la condition globale, pour tout  $(\rho', b') \in Jord(\sigma[\rho', s']^{GL})$  tel que  $b' = b_0 - 1$ ,  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) \neq 0$ . Soit  $(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})$  tel que  $b = b_0 - 1$ . Considérons le cas où  $\rho = \rho'$ ; alors nécessairement  $(b - 1)/2 = s'$  (c'est la régularité que l'on utilise ici), alors comme  $s' \geq 1/2$ , nécessairement  $b \geq 2$  et  $b_0 > 2$ . Donc  $(\rho_0, b_0 - 2) \in Jord(\sigma[\rho', s'])$  et par la proposition, comme  $b' - 1 = b_0 - 2$ ,  $L(\rho' \times \rho_0, 1/2) \neq 0$ . Par l'équation fonctionnelle, on a bien  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) \neq 0$ . Supposons maintenant que  $\rho \neq \rho'$ ; ici on a  $(\rho, b) \in Jord(\sigma[\rho', s']^{GL})$  et on a encore  $L(\rho_0 \times \rho, 1/2) \neq 0$ .

On a donc démontré que les 2 conditions du théorème sont nécessaires pour que  $\pi$  ne soit pas cuspidale.

Réciproquement supposons que ces 2 conditions soient satisfaites; on construit les composantes locales de  $\sigma$  en inversant les arguments ci-dessus; aux places scindées,  $\sigma_v = \pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$ ; aux places sphériques,  $\sigma_v$  est l'unique représentation sphérique du paquet défini par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  et aux places archimédiennes  $\sigma_v$  est donné par le lemme 2 de 3.1. Ici il faut vérifier que  $\sigma$  qui est construite via ses composantes locales est bien de carré intégrable. On l'admet ici et on fixe une réalisation.

Une fois que l'on a cela, on construit les séries d'Eisenstein; il faut vérifier qu'elles ont un pôle d'ordre 1 exactement en  $s_0 = (b_0 - 1)/2$ . Le facteur de normalisation a bien un pôle grâce à la condition globale pour certains opérateur d'entrelacement dont celui que l'on décrit en (1) ci-dessous. On sait que les opérateurs d'entrelacements normalisés sont holomorphes et au moins l'un d'entre eux est d'image non nulle : on considère l'opérateur

$$|\rho_0|^s \times \pi \rightarrow |\rho_0|^{-s} \times \pi. \quad (1)$$

Aux places sphériques, l'opérateur d'entrelacement est l'identité sur le vecteur sphérique. Pour  $v$  une place scindée ou pour  $v$  une place archimédienne, on a montré que son image est précisément  $\pi_v$ . On a donc montré que l'ensemble des résidus écrits dans l'énoncé contient la représentation  $\pi_v$ .

Il reste encore à démontrer que l'espace décrit dans l'énoncé est irréductible; en toute place, on a vérifié que  $|\rho_{0,v}|^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$  a un unique quotient irréductible. Ainsi la représentation automorphe globale,  $|\rho_0|^s \times \pi$  a un unique quotient irréductible. Or l'espace de l'énoncé est nécessairement semi-simple car inclus dans l'ensemble des formes automorphes de carré intégrable et donc somme directe de quotients irréductibles de l'induite écrite; on en déduit l'irréductibilité.

Il faut maintenant montrer la proposition; soit donc  $\rho', s'$  tel que  $\pi[\rho', s']$  soit non nul. Comme  $\pi[\rho', s'] \neq 0$ , on sait que  $\pi$  n'est pas cuspidale. On réalise  $\pi$  comme ci-dessus dans l'espace des résidus à partir des séries d'Eisenstein

$$\left( (s - s_0)E(|\rho_0|^s \times \sigma, s) \right)_{s=s_0}$$

où  $(\rho_0, s_0 = (b_0 - 1)/2, \sigma$  sont comme ci-dessus. Les termes constants de  $\pi$  sont parmi les termes constants de ces résidus de séries d'Eisenstein. On sait parfaitement calculer les termes constants des séries d'Eisenstein et donc 2 cas sont possible :

- soit  $\rho' = \rho_0$  et  $s' = (b_0 - 1)/2$  et  $\pi[\rho', s'] = \sigma$ ,
- soit  $(\rho', s') \neq (\rho_0, s_0)$ ,  $\sigma[\rho', s'] \neq 0$  et  $\pi[\rho', s']$  se réalise dans

$$\left( (s - s_0)E(|\rho_0|^s \times \sigma[\rho', s'], s) \right)_{s=s_0}. \quad (2)$$

Dans le premier cas, la proposition résulte directement du théorème. Dans le 2e cas, on applique le théorème à (2) : il faut vérifier que  $\sigma[\rho', s']$  a de la cohomologie à l'infini mais on sait dans quel paquet se trouve  $\sigma[\rho', s']$  d'après 1.2.1 remarque 2. Il s'agit donc de vérifier que la représentation du groupe linéaire a de la cohomologie mais cela est très facile puisque l'on connaît la représentation explicitement. Il est clair que  $\sigma[\rho', s']$  est sphérique aux places non décomposées puisque cela est vrai pour  $\sigma$ . On n'a pas besoin de savoir si  $\sigma[\rho', s']$  est irréductible ou non puisque l'on sait que cette représentation est de carré intégrable et donc semi-simple. La condition de la proposition est alors que pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi[\rho', s']^{GL})$  vérifiant  $b = 2s'$ ,  $L(\rho' \times \check{\rho}, 1/2) \neq 0$ . Or soit  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\sigma[\rho', s']^{GL})$  auquel cas la condition vient de la proposition pour  $\sigma$ , soit  $(\rho, b) = (\rho_0, b_0)$ . Dans ce dernier cas, on sait que  $2s' - 1 \geq b_0 - 1 \geq 1$  et donc que  $(\rho', 2s' - 1) \in \text{Jord}(\sigma[\rho', s'])$ ; comme les séries d'Eisenstein pour l'induite  $\rho_0^s \times \sigma[\rho', s']$  doivent avoir un pôle en  $s = (b_0 - 1)/2$ , la condition globale du théorème appliquée à  $(\rho', 2s' - 1)$  donne la condition  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) \neq 0$ ; c'est la condition voulue après avoir appliqué l'équation fonctionnelle. Cela termine la preuve.

### 3.8 Une variante du théorème simple pour les groupes unitaires

On reprend les hypothèses de 3.7.

**Théorème.** *On suppose que  $\pi$  a de la cohomologie à l'infini et qu'en toute place finie  $v$  non scindée la représentation  $\pi_v$  est dans le paquet de Langlands défini par  $\pi_v^{GL}$ . (cf. ci-dessus) Alors la condition globale et la condition locale de 3.7 sont suffisantes pour que  $\pi$  ne soit pas cuspidale.*

On fixe  $(\rho_0, b_0) \in Jord(\pi^{GL})$  satisfaisant à la condition globale et à la condition locale à l'infini. On peut encore construire  $\sigma$  de tel sorte que  $\pi$  se réalise dans l'espace des résidus associé à  $\rho_0 ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma$ . Aux places archimédiennes, la composante locale  $\sigma_v$  est définie comme en loc. cite grâce à la condition locale. Aux places scindées, il n'y a pas de difficulté non plus. Soit donc  $v$  une place finie non scindée. Dans 3.6, on a remarqué que l'on peut écrire  $\pi_v$  comme quotient irréductible de  $\rho_{0,v} ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$  avec  $\sigma_v$  dans le bon paquet de Langlands et avec essentiellement les mêmes paramètres de Langlands que  $\pi_v$ . Il faut maintenant s'assurer que la représentation  $\sigma$  est de carré intégrable (c'est toujours le cas particulier des conjectures d'Arthur). Ensuite la preuve que  $\pi$  est la représentation de  $G$  dans l'ensemble des résidus

$$\left( (s - (b_0 - 1)/2) E(\rho_0 ||^s \times \pi) \right)_{s=(b_0-1)/2}$$

est comme en 3.7. Cela termine la preuve.

Ici on ne démontre pas que les conditions sont nécessaires car on n'a pas démontré que pour  $v$  une place finie non scindée,  $\sigma_v$  est uniquement déterminé avec uniquement les 2 propriétés suivantes :  $\sigma_v$  est dans le paquet d'Arthur déterminé par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  et  $\rho_{0,v} ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$  a  $\pi_v$  comme quotient irréductible. Donc on n'a pas l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisé si  $\sigma_v$  satisfait ces 2 conditions mais n'est pas dans le paquet de Langlands inclus dans le paquet d'Arthur.

## 4 La conjecture précise

On reprend les hypothèses générales sur  $G$  puisque l'on n'en est qu'au stade de conjectures. Soit  $\pi$  une représentation de carré intégrable de  $G$  ; ici on continue de supposer que  $\pi$  a de la cohomologie à l'infini. On veut écrire des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\pi$  ne soit pas cuspidale et réaliser alors  $\pi$  dans un ensemble de résidus de séries d'Eisenstein. On a vu que nécessairement il existe un  $(\rho_0, b_0)$  et une représentation  $\sigma$  d'un groupe de même type que  $G$  mais de rang plus petit tels que  $\sigma$  soit de carré intégrable et tel que les séries d'Eisenstein construites à partir de l'induite automorphe  $\rho_0 ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma$  aient un pôle d'ordre 1 exactement et  $\pi$  est une sous-représentation de l'espace des résidus associés.

On a déjà dit que l'on s'attend à ce que les pôles des séries d'Eisenstein ne viennent que des facteurs globaux de normalisation ; donc c'est une vieille conjecture que la condition globale que l'on récrit ci-dessous soit nécessaire :

**condition globale :** *il existe  $(\rho_0, b_0) \in Jord(\pi^{GL})$  avec  $b_0 \geq 2$  et pour tout  $(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})$  tel que  $b = b_0 - 1$ ,  $L(\rho \times \check{\rho}, 1/2) \neq 0$ .*

Quand on fixe  $(\rho_0, b_0)$  où  $\rho_0$  est une représentation cuspidale unitaire d'un groupe  $GL(d_0, \mathbb{A}_{k'})$ , on définit une représentation de  $GL(n^* - 2d_0, \mathbb{A}_{k'})$  par :

$$\sigma^{GL} := \times_{(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL}), (\rho, b) \neq (\rho_0, b_0)} Sp_{\rho}(\rho, b) \times Sp_{\rho}(\rho_0, b_0 - 2), \quad (1)$$

où le dernier facteur n'apparaît pas si  $b_0 = 2$ . En toute place  $v$ , on a donc comme condition nécessaire le fait qu'il existe une représentation  $\sigma_v$  dans le paquet d'Arthur associé à  $\sigma^{GL}$  telle que  $\pi_v$  soit

un quotient de  $\rho_{0,v}|^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$ . Si  $G$  est un groupe unitaire, si  $v$  est archimédienne et si  $\pi'_v$  a de la cohomologie, cela détermine uniquement  $\sigma_v$  et cette condition locale est exactement celle qui est intervenue dans les théorèmes 3.7, 3.8. Elle est donc nécessaire dans une bien plus grande généralité que dans les énoncés des théorèmes. Et on peut l'écrire pour toute place  $v$  :

**condition locale :** pour toute place  $v$ , la représentation  $\pi_v$  est un  $\rho_{0,v}, (b_0 - 1)/2$  quotient, c'est-à-dire qu'il existe une représentation  $\sigma_v$  dans le paquet local défini par (1) tel que  $\pi_v$  soit un quotient de  $\rho_{0,v}|^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$ .

Il me semble que la condition globale et les conditions locales en toute place  $v$  sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe  $\sigma$  une représentation de carré intégrable tel que  $\pi$  se réalise dans l'espace des résidus associés à l'induite automorphe  $\rho_0|^{(b_0-1)/2} \times \sigma$ .

Toutefois, une conjecture comme cela n'est guère intéressante, il faut arriver à traduire la condition locale en terme de paramètres comme cela a été fait aux places archimédiennes pour les représentations ayant de la cohomologie ( $G$  groupe unitaire).

#### 4.1 Paramétrisation locale aux places finies

Soit  $v$  une place finie, non scindée si  $G$  est un groupe unitaire et soit  $F$  la complétion de  $k$ . Un paquet d'Arthur c'est d'abord une représentation de  $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  que l'on décompose en représentations irréductibles. Avec l'hypothèse simplificatrice que la conjecture de Ramanujan est vraie, la décomposition en représentations irréductibles donne un ensemble, avec multiplicité, de triplet  $(\tau, a, b)$  ; un triplet  $(\tau, a, b)$  paramétrise une sous-représentation irréductible de la représentation donnée qui est le produit tensoriel d'une représentation irréductible unitaire  $\tau$  de  $W_F$  et des représentations irréductibles de dimension  $a$  et  $b$  respectivement des 2 facteurs  $SL(2, \mathbb{C})$ . On utilise volontairement la notation  $\tau$  puisque l'on identifie librement une représentation irréductible de  $W_F$  et une représentation cuspidale irréductible d'un groupe linéaire convenable en utilisant la correspondance de Langlands démontrée par Harris-Taylor et Henniart. On note  $\mathcal{T}$  cet ensemble de triplets. On note  $\mathcal{T}_{bp}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{T}$  responsable du fait que le paquet d'Arthur n'est pas réduit à un élément. Précisément c'est l'ensemble des triplets  $(\tau, a, b)$  tel que la représentation de  $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  associée à un tel triplet est à valeurs dans un groupe de même type que  ${}^L G$ .

On distingue les représentations à l'intérieur du paquet d'Arthur à l'aide d'un couple d'applications,  $\eta, t$  définies sur  $\mathcal{T}_{bp}$  telles que  $\eta$  soit un signe et  $t$  est à valeurs dans les entiers avec  $t(\tau, a, b) \in [0, [\inf(a, b)/2]]$ . On retrouve le caractère,  $\epsilon$ , du centralisateur qui intervient dans les conjectures d'Arthur, d'abord en interprétant  $\epsilon$  comme une application de  $\mathcal{T}_{bp}$  à valeurs dans  $\{\pm 1\}$  et en posant

$$\epsilon(\tau, a, b) = \eta(\tau, a, b)^{\inf(a,b)} (-1)^{[\inf(a,b)/2] + t(\tau, a, b)}.$$

Ici  $[\cdot]$  est la partie entière. Il y a un problème de normalisation que nous avons discuté dans [30] et sur lequel on reviendra ailleurs. Nos choix ne sont sans doute pas les bons pour les applications globales. Dans [26], [27], on a associé à un tel couple d'applications soit la représentation 0 soit une représentation irréductible dans le paquet d'Arthur et on a montré que l'on avait bien ainsi obtenu toutes les représentations du paquet.

On peut essayer de comprendre cette paramétrisation en la mettant en parallèle avec la paramétrisation des représentations ayant de la cohomologie. Revenons donc au cas des places archimédiennes, en supposant que  $G$  est un groupe unitaire. La situation est plus jolie quand on regarde simultanément tous les groupes  $U(p, q)$  avec uniquement  $p+q$  fixé. Un paquet de représentations ayant de la cohomologie est donc donné par une partition  $(n_j; j \in [1, k])$  de  $p+q$  et un caractère unitaire du groupe  $\times_{j \in [1, k]} GL(n_j, \mathbb{C})$  que l'on écrit  $\otimes_{j \in [1, k]} \mu_j$ . Les représentations à l'intérieur du paquet sont

paramétrisés par l'ensemble des couples  $(p_j, q_j); n_j = p_j + q_j; j \in [1, k]$ ; il faut voir l'application  $t$  paramétrisant la représentation défini par les couples  $(p_j, q_j); j \in [1, k]$  comme l'application qui vaut sur  $(\mu_j, n_j)$  pour  $j \in [1, k]$ ,  $t_j := \inf(p_j, q_j)$  et  $\eta$  vaut par exemple  $+$  si  $p_j \geq q_j$  et  $-$  sinon. Comme on le voit, il n'y a pas de canonicité dans un tel choix mais cela donne une paramétrisation et le caractère d'Arthur se calcule à partir de  $t, \eta$ . La ressemblance entre les places archimédiennes et les places finies n'est quand même que très vague.

Revenons à  $v$  une place finie.

Pour décrire une représentation  $\sigma$  dans le paquet défini par (1) telle que  $\pi_v$  soit un quotient de  $\rho_{0,v} ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$ , on va décrire les paramètres de  $\sigma_v$  en fonction de ceux de  $\pi_v$ , quand c'est possible. On conjecturera que quand cette description n'est pas possible  $\sigma_v$  n'existe pas avec ces 2 propriétés.

On commence par décrire les triplets qui définissent le paquet d'Arthur à la place  $v$  défini par (1); pour cela, il faut décrire  $\rho_{0,v}$  comme une induite (que l'on a supposé tempérée) de la forme  $\times_{(\tau,a)} St(\tau, a)$ . On note  $Jord(\rho_{0,v})$  l'ensemble des couples intervenant dans cette induite, l'ensemble a de la multiplicité; l'application qui a  $(\tau, a) \in Jord(\rho_{0,v})$  associe  $(\tau, a, b_0)$  est une injection de  $Jord(\rho_{0,v})$  dans  $\mathcal{T}$  qui n'est pas bien définie puisque  $\mathcal{T}$  et  $Jord(\rho_{0,v})$  ont de la multiplicité. Pour faire la construction plus précisément considérons les ensembles  $Jord(\rho_{0,v})^{sm}$  et  $\mathcal{T}^{sm}$  les ensembles précédents mais sans multiplicité; l'injection est alors bien défini et pour tout  $(\tau, a) \in Jord(\rho_{0,v})^{sm}$  la multiplicité de  $(\tau, a, b_0)$  dans  $\mathcal{T}$  est supérieure ou égale à la multiplicité de  $(\tau, a)$  dans  $Jord(\rho_{0,v})$ . On définit alors  $\mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  l'ensemble des triplets  $(\tau, a, b)$  tels que

- soit  $b \neq b_0$  et  $b_0 - 2$  et la multiplicité de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  est celle de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}$
- soit  $b = b_0$  et la multiplicité de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  est celle de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}$  moins celle de  $(\tau, a)$  dans  $Jord(\rho_{0,v})$
- soit  $b = b_0 - 2$  et la multiplicité de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  est celle de  $(\tau, a, b) \in \mathcal{T}$  plus celle de  $(\tau, a)$  dans  $Jord(\rho_{0,v})$ .

Cet ensemble de triplets est celui qui correspond à (1) ci-dessus. On définit naturellement l'intersection  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  comme l'ensemble des triplets  $(\tau, a, b)$  qui interviennent dans les 2 ensembles avec multiplicité au moins 1. On regarde l'ensemble des applications  $t^{\rho_{0,v}, b_0}$  et  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}$  sur  $\mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  qui coïncident avec les applications  $t, \eta$  sur l'intersection  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$  et qui pour tout  $(\tau, a) \in Jord(\rho_{0,v})$  vérifient des conditions malheureusement un peu compliquées : on suppose d'abord que  $b_0 = 2$ ; ici le couple  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}, t^{\rho_{0,v}, b_0}$  n'est défini que si  $t(\tau, a, 2) = 1$  et  $\eta(\tau, a, 2) = +$  pour tout  $(\tau, a) \in Jord(\rho_{0,v})$  et on a alors  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0} = \eta$  et  $t^{\rho_{0,v}, b_0} = t$  sur  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\rho_{0,v}, b_0}$ .

On suppose maintenant que  $b_0 > 2$ . On complète alors la définition de  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}$  et  $t^{\rho_{0,v}, b_0}$  en demandant que soit vérifiées les égalités et inégalités suivantes ( $\epsilon^{\rho_{0,v}, b_0}$  est défini pour  $\sigma$  comme  $\epsilon$  l'est pour  $\pi_v$ ), pour tout  $(\tau, a, b_0) \in \mathcal{T}$  :

$$\begin{aligned} \epsilon^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) &= \epsilon(\tau, a, b_0); & (*) \\ \eta^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2)(-1)^{\inf(a, b_0 - 2)} &= \eta(\tau, a, b_0)(-1)^{\inf(a, b_0)} \\ t^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) - t(\tau, a, b_0) &\in \{-1, 0\}. \end{aligned}$$

Ces conditions se simplifient quand  $a \neq b_0 - 1$ ; on obtient si  $a < b_0 - 1$ ,  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) = \eta(\tau, a, b_0)$  et  $t^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) = t(\tau, a, b_0)$ . Si  $a > b_0 - 1$ , on a encore l'égalité  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) = \eta(\tau, a, b_0)$  mais ici  $t^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) = t(\tau, a, b_0) - 1$ .

Les difficultés n'apparaissent donc que si  $a = b_0 - 1$ . Dans ce cas, on a  $\eta^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0 - 2) = -\eta(\tau, a, b_0)$  et  $t^{\rho_{0,v}, b_0}(\tau, a, b_0) = t(\tau, a, b_0)$  exactement quand  $\eta(\tau, a, b_0) = +$ . Si  $a$  est pair et si  $t(\tau, a, b_0) = a/2$ , le signe  $\eta(\tau, a, b_0)$  est nécessairement fixé par convention et je l'ai fixé comme valant

+ ; ici il faut le fixer comme valant  $-$  pour que les formules soient correctes dans le cas où je sais les démontrer.

On voit donc que ces formules définissent uniquement  $\eta^{\rho_0, v, b_0}(\tau, a, b_0 - 2)$  et  $t^{\rho_0, v, b_0}(\tau, a, b_0 - 2)$  sauf exactement si  $t(\tau, a, b_0) = 0$  alors que soit  $a > b_0 - 1$  soit  $a = b_0 - 1$  et  $\eta(\tau, a, b_0) = -$ . Donc l'obstruction à construire  $\eta^{\rho_0, v, b_0}$  et  $t^{\rho_0, v, b_0}$  vient du fait que les formules ci-dessus doivent être compatibles avec la propriété requise que  $\eta^{\rho_0, v, b_0}$  coïncide avec  $\eta$  sur  $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\rho_0, v, b_0}$  et la même propriété pour  $t^{\rho_0, v, b_0}$  et  $t$ . En particulier :

**Remarque 1.** *Il n'existe pas de couple  $t^{\rho_0, v, b_0}, \eta^{\rho_0, v, b_0}$  satisfaisant à la recette ci-dessus, s'il existe  $(\tau, a) \in \text{Jord}(\rho_{0, v})$  avec  $(\tau, a, b_0 - 2) \in \mathcal{T}$  et  $\epsilon(\tau, a, b_0) \neq \epsilon(\tau, a, b_0 - 2)$ .*

Cela résulte de (\*) et cela donne une condition nécessaire sur les paramètres d'Arthur. Comme on le voit, cette condition est nécessaire pour l'existence de  $\eta^{\rho_0, v, b_0}, t^{\rho_0, v, b_0}$  mais n'est pas suffisante.

**Remarque 2.** *Si 2 couples d'applications  $t, \eta, t', \eta'$  donnent le même couple  $t^{\rho_0, v, b_0}, \eta^{\rho_0, v, b_0}$  alors ces couples coïncident.*

En effet on peut calculer  $t, \eta$  à partir de  $t^{\rho_0, v, b_0}, \eta^{\rho_0, v, b_0}$  en renversant les formules mais il faut remarquer que tous les couples relatifs au paquet de (1) ne sont pas obtenus. Il y a une obstruction quand il existe  $(\tau, a) \in \text{Jord}(\rho_{0, v})$  tel que la multiplicité de  $(\tau, a) \in \text{Jord}(\rho_{0, v})$  est strictement inférieure à la multiplicité de  $(\tau, a, b_0)$  dans  $\mathcal{T}$ .

## 4.2 La conjecture locale

On fixe une place  $v$  finie et on considère le paquet local défini par  $\pi_v^{GL}$  ; on fixe aussi  $\rho_0, b_0$  tel que  $(\rho_0, b_0) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ . On a donc aussi le paquet  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$ . Soit  $\pi_v$  dans le paquet de  $\pi_v^{GL}$ , on lui associe le couple d'application  $t_{\pi_v}, \eta_{\pi_v}$  ; soit aussi  $\sigma_v$  une représentation dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  ; on lui associe  $\eta_{\sigma_v}, t_{\sigma_v}$ . On définit  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  comme l'ensemble des couples  $\pi_v, \sigma_v$  comme ci-dessus et tel que  $\eta_{\pi_v}^{\rho_0, v, b_0} = \eta_{\sigma_v}$  et  $t_{\pi_v}^{\rho_0, v, b_0} = t_{\sigma_v}$  avec les notations de la section précédente. On a montré que  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  est un graphe dont les projections ne sont pas nécessairement surjectives sur le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$  pour la première projection et sur le paquet défini par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  pour la deuxième projection. Une difficulté est que même si  $\eta_{\pi_v}^{\rho_0, v, b_0}$  et  $t_{\pi_v}^{\rho_0, v, b_0}$  sont définis la représentation  $\sigma_v$  associée peut être nulle. Dans ce cas, évidemment  $\pi_v, 0$  n'est pas un couple de  $\mathcal{C}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ .

On définit aussi  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  comme l'ensemble des couples  $(\pi_v, \sigma_v)$  tel que  $\pi_v$  soit dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$  et  $\sigma_v$  soit dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  et tel que  $\pi_v$  soit un quotient de l'induite  $\rho_{0, v} ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$ . Il serait agréable d'avoir la conjecture ci-dessous mais elle n'est pas indispensable.

**Conjecture**  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL}) = \mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$

Soit maintenant  $v$  une place archimédienne et supposons que le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$  ait de la cohomologie. Si  $G$  est un groupe unitaire, on a déjà défini explicitement la condition être un  $\rho_0, b_0$  quotient. On donne la définition évidente dans le cas général : on définit  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi^{GL})$  exactement comme on l'a fait dans le cas d'une place finie. On définit aussi  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi^{GL})$  comme l'ensemble des couples  $(\pi_v, \sigma_v)$  où  $\pi_v$  est le sous-quotient de Langlands de l'induite  $\rho_0 ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$  (c'est-à-dire la sous-représentation de cette induite qui contient un  $K$ -type minimal ; on espère qu'il y a bien unicité). On a alors la même conjecture locale qui elle doit être facilement décidable.

### 4.3 Conjecture sur les opérateurs d’entrelacement

La normalisation étant d’origine globale, il faut partir d’une représentation automorphe de carré intégrable  $\pi$  pour  $G$  à laquelle on a associé (via les travaux d’Arthur)  $\pi^{GL}$  et  $Jord(\pi^{GL})$ . Soit  $(\rho_0, b_0) \in Jord(\pi^{GL})$ ; on définit  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  comme en 1.3. Soit  $v$  une place de  $k$  et soit  $\sigma_v$  une représentation dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$ . On considère l’opérateur d’entrelacement normalisé

$$N_v(s, \sigma_v) : \rightarrow \rho_{0,v} ||^s \times \sigma_v \rightarrow \rho_{0,v} ||^{-s} \times \sigma_v$$

**Conjecture d’holomorphie pour les opérateurs d’entrelacement normalisés.**

$N_v(s, \sigma_v)$  est holomorphe pour tout  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Dans tout ce qui suit, on admet cette conjecture pour que les constructions aient un sens.

L’opérateur est  $N_v(s, \sigma_v)$  est donc défini en  $s = (b_0 - 1)/2$  et on le note  $N_v((b_0 - 1)/2, \sigma_v)$ . Cet opérateur peut être identiquement nul. On pose  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL}) := \{(\pi_v, \sigma_v)\}$  tels que  $\pi_v \hookrightarrow Im N((b_0 - 1)/2, \sigma_v)$ ,  $\pi_v$  est dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL}$  et  $\sigma_v$  est dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$ . Il est clair que  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  est inclus dans  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$

**Conjecture de non nullité pour les opérateurs d’entrelacement normalisés.**

- (i)  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  contient l’ensemble  $\mathcal{C}_{parametrisation}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  et ces 2 ensembles ont même image sous la première projection.
- (ii) les ensembles  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  et  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  ont même première projection.

On a besoin du (i) de cette conjecture pour contrôler les signes d’Arthur; avec cette conjecture pour tout  $\pi_v$  dans l’image de la première projection de  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ , on pourra trouver  $\sigma_v$  dans le paquet associé à  $\pi_v^{GL, \rho_0, b_0}$  satisfaisant à 4.1 (\*). Le (ii) est uniquement là pour donner une interprétation plus jolie de l’image sous la première projection de  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ .

### 4.4 Conjecture

**Conjecture globale.** Soit  $\pi$  une représentation automorphe irréductible de carré intégrable ayant de la cohomologie à l’infini. Alors  $\pi$  n’est pas cuspidale si et seulement si

il existe  $(\rho_0, b_0) \in Jord(\pi^{GL})$  tel que pour tout  $(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL})$  tel que  $b' = b_0 - 1$ ,  $L(\rho_0 \times \rho', 1/2) \neq 0$

en toute place  $v$  archimédienne,  $\pi_v$  est un  $\rho_{0,v}, (b_0 - 1)/2$  quotient, c’est à dire que  $\pi_v$  est construite avec un couple  $L, \lambda$  avec  $L$  suffisamment non compact (le suffisamment dépendant de  $\rho_{0,v}$ )

en toute place  $v$  fini non scindée, la représentation  $\pi_v$  est dans l’image de la première projection de  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$ .

Comme on ne connaît pas pour le moment la formule de multiplicité exacte dans l’ensemble des formes automorphes de carré intégrable pour  $G$ , il vaut mieux se contenter de caractériser les représentations  $\pi$  qui sont isomorphes à une représentation de carré intégrable non cuspidale.

Le but de la fin de l’article est de montrer que cette conjecture globale, avec la modification ci-dessus, résulte des conjectures sur les opérateurs d’entrelacement normalisés décrites en 4.3.

**Remarque 1.** Soit  $\pi$  une représentation automorphe de carré intégrable pour  $G$  ayant de la cohomologie à l’infini.

(i) La conjecture globale résulte des conjectures d'holomorphic et de non nullité pour les opérateurs d'entrelacement normalisés écrites en 4.3. En particulier si  $\pi$  satisfait aux conditions locales et globales de la conjecture pour un choix de  $(\rho_0, b_0) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ , alors il existe une forme automorphe de carré intégrable,  $\sigma$  dans le paquet associé à  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  tel que  $\pi$  soit isomorphe à un sous-module de la représentation résiduelle

$$\text{Res}(\rho_0, s_0, \sigma) := \left( (s - s_0)E(\rho_0 | |^s \times \sigma, s) \right)_{s=s_0},$$

où ici  $s_0 = (b_0 - 1)/2$ .

(ii) Les conjectures d'holomorphic et de non nullité sur les entrelacement normalisés entraînent que s'il existe  $\rho', s'$  tel que  $\pi[\rho', s'] \neq 0$  en 1.2.1 alors pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b = b_0 - 1$ ,  $L(\rho' \times \rho, 1/2) \neq 0$ .

(iii) Si  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL}) = \mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL}) = \mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ , alors la représentation résiduelle de (i) est irréductible ou nulle.

Pour la nécessité des conditions, la démonstration est exactement celle de 3.7 : on démontre (i) en admettant (ii) pour les groupes de rang plus petit, puis on démontrera (ii) en connaissant (i). On sait a priori que  $\pi$  se réalise dans un espace de résidu comme en 1.3. La série d'Eisenstein écrite doit avoir un pôle d'ordre 1 ; ce pôle ne peut venir que des fonctions  $L$  à cause de la conjecture d'holomorphic des opérateurs d'entrelacement normalisé. Ce pôle ne doit pas être annulé par un zéro de fonction  $L$ . On ne refait pas la démonstration, mais c'est ce qui donne la nécessité de la condition globale cf. 3.7.

Comme  $\pi_v$  est nécessairement un quotient irréductible de  $\rho_0 | |^{(b_0-1)/2} \times \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation de carré intégrable dans le paquet associé à  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  (cf 1.3), la représentation  $\pi_v$  est dans l'image de la première projection de  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$  ce qui est la condition locale. On remarque qu'ici on n'a pas démontré que  $\pi_v$  est dans l'image de la première projection de  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  ; c'est une des difficultés qui se cache dans la conjecture de non nullité. Si l'on ne réussit pas à démontrer le (ii) de la conjecture de non nullité, il faudra revenir sur ce point.

Réciproquement supposons que  $\pi$  vérifie les conditions globale et locale de la conjecture et montrons que  $\pi$  n'est pas cuspidale. Pour toute place  $v$ , on fixe une représentation notée ici  $\sigma_v$  tel que  $(\pi_v, \sigma_v)$  soit dans  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi^{GL})$ . il faut montrer que  $\sigma$  est alors de carré intégrable, on avait éludé le problème en loc.cite et on revient donc sur ce problème. Il est amusant de remarquer que la condition globale assure que le caractère signe défini globalement via l'ordre des zeros de certaines fonctions  $L$  est "le même" pour  $\pi$  et pour  $\sigma$ , cf. ci-dessous ; la condition d'Arthur est que ce caractère globale coïncide avec le produit des caractères locaux (associés à chaque  $\pi_v$  ou chaque  $\sigma_v$  du moins quand on restreint ce caractère produit à un bon groupe. Explicitement, on définit une application  $\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}$  de  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  dans  $\pm 1$  en posant pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$

$$\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}(\rho, b) := \prod_{(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL})_{b \neq b'[2]}} \epsilon(\rho \times \rho', 1/2)^{\text{inf}(b, b')} \quad (1)$$

C'est le caractère qui intervient quand on rend eulérien l'opérateur d'entrelacement qui donne la trace tordue globale dans la formule des traces pour  $GL$  tordu par  $\theta$ . On définit aussi une autre application  $\epsilon_{\pi, \text{loc}}$  de  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  dans  $\pm 1$  ; on a besoin de la notation  $\epsilon(\tau, a, b)$  de 4.1 qui devient  $\epsilon_{\pi, v}(\tau, a, b)$  pour marquer la dépendance en  $\pi$  et en  $v$ . Ce signe est aussi défini aux places archimédiennes, il reflète la forme réelle du groupe  $L$ , cf. [2] et [3]. On pose alors

$$\epsilon_{\pi, \text{loc}}(\rho, b) = \prod_v \prod_{(\tau, a) \in \text{Jord}(\rho_v)} \epsilon_{\pi, v}(\tau, a, b)^b, \quad (2)$$

où les  $(\tau, a)$  sont comptés avec multiplicité. La condition d'Arthur est que  $\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}$  coïncide avec  $\epsilon_{\pi, \text{loc}}$  ; ce n'est pas écrit comme cela dans la littérature mais cela se déduit de [5] 30.16 via les conjectures

standard, pour ma part, j'ai refait le calcul en utilisant la formule des traces pour les groupes linéaires et les conjectures standard de stabilisation. Ayant cette condition pour  $\pi$  il faut son analogue pour  $\sigma$ .

On a vérifié en 4.1 (\*) que  $\epsilon_{\pi,loc}(\rho_0, b_0) = \epsilon_{\sigma,loc}(\rho_0, b_0 - 2)$  pour  $(\rho_0, b_0)$  comme ci-dessus et  $\epsilon_{\pi,loc}(\rho, b) = \epsilon_{\sigma,loc}(\rho, b)$  presque par définition si  $(\rho, b) \neq (\rho_0, b_0)$ ; aux places archimédiennes, des égalités de même nature viennent du fait qu'en changeant de représentation cohomologique on ne change pas la forme de  $L$ ; on ne fait qu'enlever des plans hyperboliques. C'est par définition cette égalité que l'on a mis dans la définition de  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$

On fixe  $(\rho, b) \in Jord(\pi^{GL})$  avec  $(\rho, b) \neq (\rho_0, b_0)$ ; on veut démontrer que l'on a :

$$\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}(\rho, b) \epsilon_{\pi^{GL}, \rho_0, b_0, \mathcal{A}}(\rho, b) = 1.$$

Cette égalité est claire par définition si  $b \equiv b_0[2]$  ou si  $b < b_0 - 2$  ou si  $b > b_0$ . Il reste donc à voir le cas où  $b = b_0 - 1$ ; par définition, on a

$$\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}(\rho, b) \epsilon_{\pi^{GL}, \rho_0, b_0, \mathcal{A}}(\rho, b) = \epsilon(\rho \times \rho_0, 1/2).$$

Mais  $\epsilon(\rho \times \rho_0, 1/2) = +1$  puisque la fonction  $L(\rho \times \rho_0, 1/2) \neq 0$  par hypothèse. On a donc l'égalité annoncée. On calcule encore  $\epsilon_{\pi^{GL}, \mathcal{A}}(\rho_0, b_0) \epsilon_{\pi^{GL}, \rho_0, b_0, \mathcal{A}}(\rho_0, b_0 - 2)$ ; où  $\epsilon_{\pi^{GL}, \rho_0, b_0, \mathcal{A}}(\rho_0, b_0 - 2) = 1$  si  $b_0 = 2$ . Quand on a éliminé les termes évidemment communs aux 2 produits, il reste

$$\prod_{(\rho', b') \in Jord(\pi^{GL}); b' = b_0 - 1} \epsilon(\rho_0 \times \rho', 1/2);$$

ceci vaut encore 1 grâce à la condition globale.

On a ainsi montré que  $\sigma$  est une représentation de carré intégrable. On calcule alors la représentation résiduelle de l'énoncé avec  $\pi' := \sigma$ . On note pour simplifier  $Res(\rho_0, \sigma, s_0)$  cette représentation avec  $s_0 = (b_0 - 1)/2$ . On calcule ses termes constants et en particulier  $Res(\rho_0, \sigma, s_0)[\rho_0, s_0]$ , avec les notations de 1.2.1. Ce terme constant se calcule en prenant l'image de  $\rho_0|^{s_0} \times \sigma$  par le résidu de l'opérateur d'entrelacement c'est-à-dire par  $\otimes_v N_v(s_0, \sigma_v)$  où  $N_v(s_0, \sigma_v)$  est celui défini ci-dessus. Or la représentation  $\otimes'_v \pi_v$  est dans l'image de cet opérateur d'entrelacement par la construction de  $\sigma_v$  en tout  $v$  et la représentation résiduelle qui est nécessairement semi-simple car de carré intégrable contient une représentation isomorphe à  $\otimes'_v \pi_v \simeq \pi$ . Cela termine la preuve de (i).

La preuve de (ii) a déjà été donnée en 3.7.

Prouvons (iii) : on reprend la notation  $Res(\rho_0, \sigma, s_0)$  donnée ci-dessus. Si cette représentation est non nulle, elle est semi-simple et tous ses sous-quotients irréductibles sont des quotients de  $\rho_0|^{s_0} \times \sigma$ ; soit  $\pi'$  un tel sous-quotient. En toute place  $v$ ,  $(\pi'_v, \sigma_v)$  est donc un élément de  $\mathcal{C}_{quotient}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ . Ainsi  $(\pi'_v, \sigma_v)$  est aussi dans  $\mathcal{C}_{parametres}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  et  $\pi'_v$  est uniquement déterminé par  $\sigma_v$  puisque ce dernier ensemble est un graphe. Cela prouve l'irréductibilité annoncée.

**Remarque 2.** *La conjecture d'holomorphic pour les opérateurs d'entrelacement normalisés se ramène par récurrence à la même assertion pour l'unique opérateur*

$$\rho_0|^{s_0} \times \pi \rightarrow \rho_0|^{-s_0} \times \pi.$$

Cela résulte des définitions de 2.3.

**Remarque 3.** *Fixons  $\pi, \rho_0, b_0$  satisfaisant aux conditions locales et globale de ce paragraphe et admettons les conjectures de 4.3. Ainsi  $\pi \simeq Res_{s=(b_0-1)/2} E(\rho_0|^{s_0} \times \sigma, s)$  pour  $\sigma$  convenable tel qu'en toute place  $v$ ,  $(\pi_v, \sigma_v) \in \mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$ . Alors le terme constant  $Res_{s=(b_0-1)/2} E(\rho_0|^{s_0} \times \sigma, s)[\rho_0, (b_0 - 1)/2] \neq 0$ . On a déjà vu dans la dernière partie de la preuve de la proposition 1 de 1.2.3 que ce terme constant se calcule comme résidu de l'opérateur d'entrelacement standard*

$$\rho_0|^{s_0} \times \sigma \rightarrow \rho_0|^{-s_0} \times \sigma;$$

Or ce résidu est exactement l'image de  $\otimes'_v N_v(s)$  où  $N_v(s, \sigma_v)$  est l'opérateur d'entrelacement normalisé défini en 2 et 4.3. Cela fait partie de la définition de  $\mathcal{C}_{entrelacement}^{\rho_0, b_0}(\pi_v^{GL})$  que l'image de cet opérateur contient  $\pi_v$  et n'est donc pas nulle.

## 4.5 Commentaires

Fixons ici la représentation  $\pi^{GL}$  et supposons qu'il existe  $(\rho_0, b_0) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  avec  $b_0 > 1$  et supposons aussi que la condition globale de 4.4 soit satisfaite. On construit  $\pi^{GL, \rho_0, b_0}$  et on considère  $\sigma$  une forme automorphe de carré intégrable dans ce paquet. On regarde alors les séries d'Eisenstein  $E(\rho_0 ||^s \times \sigma, f_s)$  formés avec les sections de l'induite  $\rho_0 ||^s \times \sigma$ . En  $s = s_0 := (b_0 - 1)/2$  les facteurs globaux ont un pôle. Mais la conjecture prédit que ces séries d'Eisenstein sont holomorphes en  $s = s_0$  s'il existe une place  $v$  telle que l'induite  $\rho_{0,v} ||^{(b_0-1)/2} \times \sigma_v$  n'ait pas de quotient irréductible dans le paquet défini par  $\pi_v^{GL}$ . L'explication, conjecturale, est qu'en cette place  $v$ , les opérateurs d'entrelacements pour lesquels les facteurs globaux ont un pôle, une fois normalisés sont identiquement nuls ; ou encore le facteur de normalisation en cette place introduit un zéro. Pour construire un tel exemple, on peut par exemple considérer 2 caractères quadratiques de l'anneau des adèles de  $k$ ,  $\chi_i$  pour  $i \in [1, 2]$  et on pose  $\chi_3 = \chi_1 \chi_2$ . On considère la représentation  $\pi^{GL} = \chi_1 \times \chi_2 \circ \det_{GL(5)} \times \chi_3 \circ \det_{GL(5)}$  du groupe  $GL(11, \mathbb{A})$  ; ici  $G = Sp(10, k)$ . On prend  $\rho_0 = \chi_2$  ; on suppose qu'en une place finie  $v$ ,  $\chi_{i,v}$  est le caractère trivial pour tout  $i \in [1, 3]$ . Donc le paquet  $\pi_v^{\rho_0, 5, GL}$  contient une représentation cuspidale qui peut apparaître comme composante en la place  $v$  d'une représentation  $\sigma$  de carré intégrable, nécessairement cuspidale, pour  $Sp(8, k)$  dans le paquet défini par  $\pi^{GL, \rho_0, 5}$  ; on admet l'existence d'un tel  $\sigma$ , ceci est conjecturé par Arthur et c'est un cas qui est en principe accessible par les séries theta (mais je n'ai pas de référence et je n'ai pas fait les démonstrations). Les séries d'Eisenstein construites avec l'induite automorphe  $\chi_2 ||^s \times \sigma$  ont, en  $s = 2$ , un pôle d'ordre 1 qui vient des facteurs globaux et au moins un zéro en la place  $v$  qui vient de l'unique opérateur d'entrelacement intervenant ; cf. 2.1.1. Ces séries d'Eisenstein sont donc holomorphes.

## 4.6 Quelques cas particuliers

Clozel s'est posé la question de savoir quels paquets de représentations de carré intégrable ne contiennent aucune représentation cuspidale. Son étudiant O. Paniagua-Tabaada est en train de résoudre le cas où  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  est réduit à un élément de la forme  $(\rho, b)$  où  $\rho$  est une représentation cuspidale unitaire de  $GL(2, \mathbb{A})$  et où  $G$  est un groupe orthogonal pair. Li a résolu à la suite de Howe, le cas des représentations automorphes de petit rang.

Fixons  $\pi^{GL}$  ; pour toute représentation cuspidale  $\rho$  d'un groupe linéaire, on note  $d_\rho$  l'entier tel que  $\rho$  soit une représentation de  $GL(d_\rho, \mathbb{A})$ . On suppose que  $\text{Jord}(\pi^{GL})$  contient un couple  $(\rho_0, b_0)$  tel que pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  avec  $(\rho, b) \neq (\rho_0, b_0)$  on ait  $b_0 \geq d_{\rho_0} + d_\rho + b$ . Alors les conjectures faites ici prédisent que le paquet associé à  $\pi^{GL}$  ne contient pas de représentation cuspidale.

A l'inverse, on peut se demander quels sont les paquets qui ne contiennent que des représentations cuspidales ; c'est évidemment le cas des paquets associés à une représentation  $\pi^{GL}$  tel que pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$ ,  $b = 1$ . Plus généralement supposons que pour tout  $(\rho, b) \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b > 1$ , il existe  $(\rho', b') \in \text{Jord}(\pi^{GL})$  tel que  $b' = b - 1$  et  $L(\rho \times \rho', 1/2) = 0$  ; les conjectures disent qu'un tel paquet est uniquement formé de représentations cuspidales. Et ces conjectures suggèrent fortement que c'est même le seul cas où le paquet de représentations ne contient que des représentations cuspidales.

Un autre point de vue a été développé par J. Schwermer ; étant donnée une représentation locale, par exemple une représentation à une place archimédienne ayant de la cohomologie, peut-elle être composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable non cuspidale. Schwermer a des résultats et des conjectures pour résoudre cette question [35] et [22].

## Références

- [1] J. ADAMS, D. BARBASCH, D. VOGAN *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups* Birkhäuser, Progress in Math, 104, 1992
- [2] J. ADAMS, J. JOHNSON *Endoscopic groups and packets of non-tempered representations* Compositio Math., 64, 1987, pp. 271-309
- [3] J. ARTHUR *Unipotent automorphic representations : conjectures* in Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque 171-172, 1989, pp. 13-72
- [4] J. ARTHUR *Unipotent automorphic representations; global motivation* in Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions, vol1, Clozel, Milne editors, Academic Press, perspectives in Math. vol 10, 1990
- [5] J. ARTHUR *An introduction to the trace formula* CLAY MATHEMATICS PROCEEDINGS, VOLUME 4, 2005, PP. 1-253
- [6] J. ARTHUR *A note on L-packets* PURE AND APPLIED MATH. QUARTERLY, 2 (SPECIAL ISSUE : IN HONOR OF J. H. COATES, PART 1 OF 2), 2006, PP. 199-217
- [7] J. ARTHUR *Automorphic Representations of  $GS(4)$*  IN CONTRIBUTIONS TO AUTOMORPHIC FORMS, GEOMETRY, AND NUMBER THEORY (SHALIKA VOLUME) EDITED BY H. HIDA, D. RAMAKR-ISHNAN, AND F. SHAHIDI, PAGES 65-81. JOHNS HOPKINS UNIV. PRESS, BALTIMORE, MD, 2004.
- [8] N. BERGERON, L. CLOZEL *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques* Astérisque, 303, 2005, 214 pages
- [9] I. N. BERNSTEIN, A. V. ZELEVINSKY : *Induced Representations of Reductive  $p$ -adic groups 1* Ann de l'ENS, 10, 1977, pp. 147-185
- [10] J. FRANKE *Harmonic analysis on weighted  $L_2$  spaces*, Ann ENS, 31, 1998, pp. 181-279
- [11] D. GOLDBERG *Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L-functions* Journal de Crelle, 448, 1994, pp. 65-95
- [12] M. HARRIS, R. TAYLOR, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math Studies, 151, Princeton Univ. Press, 2001
- [13] HENNIART, G. : *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour  $GL_n$  sur un corps  $p$ -adique*, Invent. Math., 139, 2000, pp. 439-455
- [14] H. JACQUET, R. LANGLANDS *Automorphic forms on  $GL(2)$* , Springer, LN 114, 1970
- [15] H. JACQUET, E. LAPID, J. ROGAWSKI *Periods of Automorphic Forms*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 12, No. 1., 1999, pp. 173-240
- [16] H. JACQUET, J. SHALIKA *On Euler products and the classification of automorphic representations I,II*, Amer. J. Math. 103, 1981, pp. 499-558 and 777-815
- [17] J. JOHNSON *Stable base change  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  of certain derived functor modules* Math. Ann., 287, 1990, pp. 467-493
- [18] J. -P. LABESSE *Cohomologie, stabilisation et changement de base* Astérisque, 257, 1999, 160 pages
- [19] R. LANGLANDS *On the functional equations satisfied by Eisenstein series* Springer, LN 544
- [20] R. LANGLANDS *Euler Products* Yale University Press, 1967
- [21] G. LAUMON G., B. -C. NGO *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, arXiv AG/0404454, à paraître Annals of Math
- [22] J. -S. LI, J. SCHWERMER *On the cuspidal cohomology of arithmetic groups*, prépublication

- [23] C. MÆGLIN *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée*, representation theory, volume 10, 2006, pp. 86-129
- [24] C. MÆGLIN *Classification des séries discrètes pour certains groupes classiques  $p$ -adiques*, Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory, volume en l'honneur de R. Howe, collectif, 2007, Lecture Notes Series, 12, IMS NUS, pp. 152-209
- [25] C. MÆGLIN *Classification et Changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires  $p$ -adiques*, prépublication, 2006, à paraître au PJM (2008)
- [26] C. MÆGLIN *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique  $p$ -adique*, <http://www.math.jussieu.fr/moeglin>, à paraître dans le volume en l'honneur de S. Gelbart, publication de l'AMS
- [27] C. MÆGLIN *Paquets d'Arthur pour les groupes classiques; point de vue combinatoire*, prépublication 2006, arXiv, GR/0610189
- [28] C. MÆGLIN *Classification des séries discrètes : paramètres de Langlands et exhaustivité*, JEMS, 4, 143-200, 2002
- [29] C. MÆGLIN, M. TADIC *Construction of discrete series for classical  $p$ -adic groups*, journal de l'AMS, volume 15, 2002, pp 715-786
- [30] C. MÆGLIN, J. -L. WALDSPURGER *Sur le transfert des traces d'un groupe classique  $p$ -adique à un groupe linéaire tordu* Selecta Math, 12, 2006, pp. 433-516
- [31] C. MÆGLIN, J. -L. WALDSPURGER *Le spectre résiduel de  $GL(N)$*  Ann de l'ENS, 22, 1989, pp 605-674
- [32] C. MÆGLIN, J. -L. WALDSPURGER *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein; une paraphrase de l'Ecriture* Birkhäuser, PM 113, 1994
- [33] B. -C. NGO *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Inventiones, 164, 2006, pp. 399-453
- [34] B. -C. NGO *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie* prépublication 2007
- [35] J. SCHWERMER *The cohomology approach to cuspidal automorphic representations* prépublication
- [36] F. SHAHIDI *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for  $p$ -adic groups* Ann. of Math. 132 (1990), pp. 273-330.
- [37] F. SHAHIDI *On certain  $L$ -functions* Amer J. of Math, 103, 1981, pp. 297-355
- [38] D. SOUDRY *On Langlands functoriality from classical groups to  $GL_n^*$*  Astérisque, 298, 2005, pp. 335-390
- [39] B. SPEH, D. VOGAN *Reducibility of generalized principal series representations* Acta Math 145, 1980, pp. 227-299
- [40] D. VOGAN, G. ZUCKERMAN *Unitary representations with non zero cohomology* Compositio Math 53, 1984, pp. 51-90
- [41] J. -L. WALDSPURGER *Le groupe  $GL_N$  tordu sur un corps  $p$ -adique, 1e et 2e partie*, Duke math. Journal, 137, 2007, pp. 185-336
- [42] J. -L. WALDSPURGER *Endoscopie et Changement de caractéristique*, JIMJ, 5.3, 2006, pp. 423-525
- [43] J. -L. WALDSPURGER *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue : intégrales orbitales*, prépublication, mai 2006, à paraître aux mémoires de l'AMS
- [44] A. V. ZELEVINSKY *Induced Representations of Reductive  $p$ -adic groups II*, Ann de l'ENS, 13, 1980, pp. 165-210