

Table des matières

Avant-propos	xv
Présentation	1
I. Le calcul barycentrique	
1. Rappels et conventions	5
2. Généralités	7
2.1. Notion de coordonnées barycentriques	7
2.2. Lien avec les coordonnées cartésiennes	8
2.3. Interprétation de l'égalité $x + y + z = 0$	9
3. Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques . . .	11
3.1. Aires et coordonnées barycentriques	11
3.2. Un cas particulier	13
3.3. Le point de LEMOINE	13
3.4. Les coordonnées trilineaires	14
4. Les équations barycentriques	15
4.1. Notion d'équation barycentrique	15
4.2. Équations barycentriques des droites	16
4.3. Les équations barycentriques de degré supérieur à 2 : un avant-goût	18
4.4. Parallélisme de droites	18
5. Alignement et concours	19
5.1. Condition d'alignement de trois points	19
5.2. Équations paramétriques de droites	21
5.2.1. Cas de la droite passant par deux points	21
5.2.2. Cas des droites d'un faisceau linéaire	21
5.3. Condition de concours de trois droites	23
6. Cas particuliers	24
7. Matrice d'une application affine	26
7.1. La formule matricielle	26
7.2. Vecteurs propres et points fixes	27
7.3. Les symétries centrales	28

7.4. Les homothéties-translations	28
7.5. Application : le cercle d'EULER	30
7.5.1. Définition du cercle d'EULER.	30
7.5.2. L'équation barycentrique du cercle d'EULER	32
8. Changement de triangle de référence	32
9. Un exemple d'homographie : l'inversion harmonique	34
10. Coordonnées barycentriques de quelques points remarquables	39
10.1. Les (!) centres de gravité	39
10.2. Le centre du cercle circonscrit	41
10.3. L'orthocentre	41
10.4. Le centre du cercle d'EULER	44
10.5. Les centres des cercles (ex)inscrits	45
10.6. Pour ne pas en rester là	46

II. Les coniques

1. Introduction	49
2. Étude des coniques circonscrites	50
2.1. Les coniques circonscrites	51
2.2. Cinq points définissent une conique	52
2.3. Un petit Nullstellensatz	55
2.4. Le centre d'une conique circonscrite	59
2.5. Le genre d'une conique circonscrite	63
2.6. Les tangentes à une conique circonscrite	63
2.7. La conjugaison (harmonique) par rapport à une conique	65
2.8. Les asymptotes d'une hyperbole circonscrite	70
2.9. Directions conjuguées d'une conique	72
2.9.1. Milieux de cordes	72
2.9.2. Conjugaison et bilinéarité	75
2.9.3. Conjugaison et polarité	76
2.9.4. Le cas particulier des cercles	77
2.10. L'équation barycentrique du cercle circonscrit	78
2.11. Du côté de chez LEIBNIZ	79
2.12. Les cercles du plan	79
2.13. L'axe radical de deux cercles. Version algébrique	80
2.14. Cercles possédant un triangle autopolaire donné	86
3. Autour du théorème de PASCAL	89
3.1. Le théorème de PASCAL	89
3.2. Un déterminant impressionnant... en apparence	94
4. Quelques résultats sur les coniques générales	96
4.1. Le théorème de CARNOT	96
4.2. Alignement de trois images affines	100
4.2.1. Généralités	100
4.2.2. Des configurations particulières	102

4.2.3. La droite de SIMSON et l'hypocycloïde de STEINER	102
4.2.4. Deux constructions préparatoires	107
4.2.5. Le H_3 par la face Nord : le problème P_1	110
4.2.6. Le H_3 par la face Sud : le problème P_2	113
4.2.7. En guise de conclusion	117
III. Correspondances remarquables liées à un triangle	
1. L'inversion isotomique	121
1.1. Définition	121
1.2. Cas particuliers	123
2. Droites, coniques et inversion isotomique	126
2.1. L'inverse isotomique d'une droite cévienne	127
2.2. L'inverse isotomique d'une droite non cévienne	128
3. Application à des constructions géométriques	130
3.1. Combien de paraboles par quatre points	130
3.2. Secrets de fabrication. Les triangles autopolaires	132
3.3. Le quatrième point commun à deux coniques	133
4. Triangles et polarisation	134
4.1. La polaire triangulaire (ou trilinéaire)	134
4.2. La dualité, ou polarisation, « formelle »	139
4.2.1. Préliminaires	139
4.2.2. Dualité et constructions géométriques	139
4.2.3. Propriétés de la dualité	140
5. Définition de l'inversion isogonale	141
5.1. La preuve géométrique	142
5.2. La preuve par les homographies	143
5.3. Premières propriétés	144
6. Des couples célèbres	146
7. Droites, coniques et inversion isogonale	149
7.1. L'inverse isogonal d'une droite cévienne	149
7.2. L'inverse isogonal d'une droite non cévienne	150
8. Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle	152
8.1. Propriétés générales	152
8.2. Théorème de PASCAL et hyperboles équilatères	157
9. Deux exercices de révision	158
9.1. Les deux inversions	158
9.2. Des triangles d'aires égales	162

IV. Les familles de coniques

1. Faisceaux linéaires de coniques circonscrites	165
1.1. Les faisceaux à quatre points de base	166
1.1.1. Faisceaux et inversion isogonale	166
1.1.2. La conique des neuf points	167
1.2. Les faisceaux de coniques tangentes	173
1.3. Coniques remarquables d'un faisceau	177
1.4. Le point de FRÉGIER	180
1.5. Une belle figure	182
2. Applications des faisceaux linéaires	188
2.1. Discussion de l'existence d'un triangle autopolaire commun	188
2.2. Le cas des cercles et le théorème de FEUERBACH	191
2.3. Faisceaux linéaires et conjugaison isogonale	199
2.3.1. Faisceaux et involutions quadratiques	199
2.3.2. Application à l'inversion isogonale	202
3. Points cycliques et foyers d'une conique inscrite	204
3.1. Une brève présentation des points cycliques	204
3.2. Coordonnées barycentriques des points cycliques	205
3.3. Foyers d'une conique inscrite	207
3.4. Foyers des coniques tangentes à quatre droites	209

V. Utilisation des nombres complexes en Géométrie

1. Introduction	219
1.1. Présentation du chapitre	219
1.2. Conventions et rappels de notations	220
2. Généralités	221
3. Application des complexes à la Géométrie du triangle	223
3.1. L'aire d'un triangle	223
3.2. Quelques points et une configuration remarquables	224
3.3. Symétries et projections orthogonales	226
4. Deux exemples et des exercices	227
4.1. Intersection de droites et polarité	227
4.2. L'astuce de MORLEY	228
4.3. Un peu de théorie de GALOIS	230
4.4. Huit exercices	231
5. Homographies du plan complexe	235
5.1. Généralités	235
5.2. Homographies stabilisant le cercle-unité	238
5.3. Le groupe $PO(\mathbb{U})$	239
5.4. Les involutions de FRÉGIER de \mathbb{U}	239
5.5. Génération de $PO(\mathbb{U})$ par les involutions de FRÉGIER	241
5.5.1. Le cas $\beta \neq 0$	241
5.5.2. Le cas $\beta = 0$	242

6. Le théorème de PASCAL	242
7. L'inversion	244
7.1. Définition	245
7.2. Le théorème de PTOLÉMÉE	246
8. Les triangles équilatéraux	247
8.1. Caractérisation des triangles équilatéraux par les affixes des sommets	247
8.2. Les centres isodynamiques	248
8.3. Quelques propriétés	248
8.4. La configuration de FERMAT–TORRICELLI	250
8.5. Annexe	255
8.5.1. La fonction de FERMAT	255
8.5.2. L'orthologie	258
8.5.3. Orthologie et isogonalité	259
9. Homographies, conformité et birapport	261
9.1. Les homographies en tant qu'applications conformes	261
9.2. Interprétation géométrique des homographies	263
9.3. Homographies, droites et cercles	263
9.4. Arcs capables et cercles d'APOLLONIUS	267
9.5. Le birapport	269
9.5.1. Définition et formules	269
9.5.2. Birapport et permutations	271
9.5.3. Birapport et homographies	276
9.5.4. Les homographies, les involutions et leurs points fixes	277
9.5.5. Birapport, droites et cercles	281
9.5.6. Les quadrangles harmoniques	282
9.5.7. Harmonie, formes quadratiques et trace	288
9.5.8. Les quadrangles équiharmoniques	294
9.5.9. Formule des six birapports et applications	295
10. Corrigé des exercices	297
10.1. Les exercices du paragraphe V-4	297
10.2. Les exercices du paragraphe V-9	303
10.3. L'exercice du paragraphe V-9.5.6	307
10.4. L'exercice du paragraphe V-9.5.9	309

VI. Les cercles du plan euclidien

1. Les équations formelles des cercles-droites	312
1.1. Polynômes et équations formelles	312
1.2. La forme quadratique fondamentale	313
1.3. Interprétation projective	316
1.4. Orthogonalité, contact, intersection, équation tangentielle .	318
1.5. Homographies et forme quadratique fondamentale	324
1.6. La démonstration en suspens	328

1.7. Résumé des principaux résultats de ce paragraphe	330
2. L'axe radical. Version géométrique	331
2.1. Puissance d'un point par rapport à un cercle	332
2.2. Cercles laissés stables par une inversion	334
2.3. L'axe radical de deux cercles	337
3. Faisceaux de cercles	339
3.1. Définition et classification	339
3.2. Propriétés algébriques des faisceaux	345
3.3. Quelques constructions relatives aux faisceaux	350
3.3.1. Cercle d'un faisceau passant par un point	350
3.3.2. Cercle d'un faisceau ayant un centre donné	352
3.3.3. Cercles d'un faisceau tangents à une droite donnée	353
3.3.4. Centres d'homothétie et faisceaux	359
3.4. Action du groupe de MÖBIUS sur les faisceaux	361
3.4.1. Prolégomènes algébriques	361
3.4.2. Étude géométrique	362
3.4.3. Applications	365
4. L'alternative de STEINER	367
4.1. Les coniques reviennent	367
4.2. Un détour par les enveloppes de cercles	372
4.3. Une chaîne de cercles	374
4.4. Et si la chaîne se refermait	376
4.4.1. La preuve classique	376
4.4.2. Une preuve algébrique	378
4.4.3. Pour aller plus loin	381
5. Voyage dans l'espace (des cercles-droites)	385
5.1. Exposé du problème	385
5.2. Les trois faisceaux d'APOLLONIUS	385
5.3. Trois faisceaux concourants	388
5.4. Pour terminer en beauté	388
6. Corrigé des exercices	394
6.1. L'exercice du VI-2.3	394
6.2. L'exercice du VI-3.1	397
6.3. Les exercices du VI-3.3.3	399
6.4. L'exercice du VI-3.4.2	401

Annexe A. Compléments de calcul barycentrique

1. Vecteurs et coordonnées barycentriques	405
2. Nombre de droites de SIMSON passant par un point donné	408
3. Intersection d'une conique et d'une droite	410
3.1. Retour vers la classification des coniques	410
3.2. Caractérisation des hyperboles et de leurs asymptotes	411
4. Intersection d'une conique et d'une courbe algébrique	414

3.1. Barycentre d'une famille finie de points massiques	475
3.2. Coordonnées barycentriques	477
3.3. Condition d'alignement	477
3.4. Équations barycentriques de droites	478
4. Complétion projective et complexification	479
4.1. Complétion projective d'un espace affine	479
4.2. Homographies	482
4.3. Extraction d'un espace affine d'un espace projectif	483
4.3.1. Les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel	483
4.3.2. Faisons le point grâce à deux exercices	486
4.3.3. Un transport de structure	487
4.3.4. Principe d'utilisation de ces constructions	488
4.4. Complexification d'un espace vectoriel réel	489
4.5. Complexification d'un espace affine réel	490
4.6. Complexification d'un espace quadratique réel	491
4.7. Espaces affines réels euclidiens	491
4.8. Complétion projective complexe d'un espace affine euclidien	492
4.9. Retour sur le cercle circonscrit et les points cycliques	494
4.10. Coniques affines et coniques projectives	497
4.11. À quoi bon	499
Bibliographie	501
Notations	503
Index	505