

Exercice I

Etudier la convergence des séries numériques

$$\sum \frac{(-1)^n}{2 + \sqrt{n}}; \quad \sum \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}.$$

Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{2 + \sqrt{n}}$; on voit que $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout entier $n \geq 0$; pour tout $n \geq 0$ on a $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, $2 + \sqrt{n} < 2 + \sqrt{n+1}$, donc $|a_n| > |a_{n+1}|$; de plus \sqrt{n} tend vers $+\infty$ donc a_n tend vers 0. La série $\sum a_n$ converge d'après le théorème des séries alternées : le signe est alterné et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

Posons $b_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$; puisque $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout x , on a $|b_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}} = c_n$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série $\sum b_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice II

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout x réel on pose

$$u_n(x) = \frac{\sin(x/n)}{n}.$$

1. Montrer que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $\sin(y) \sim y$ lorsque $y \rightarrow 0$, par conséquent on peut écrire pour $n \rightarrow +\infty$

$$|u_n(x)| = \frac{|\sin(x/n)|}{n} \sim \frac{|x|}{n^2}$$

qui est un multiple fixe du terme général d'une série de Riemann convergente. Il en résulte que la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n()$ converge normalement sur tout intervalle borné $[-a, a]$.

On utilise la majoration $|\sin(y)| \leq |y|$, valable pour tout nombre réel y . Pour tout x tel que $|x| \leq a$ on a

$$|u_n(x)| = \frac{|\sin(x/n)|}{n} \leq \frac{|x|/n}{n} \leq \frac{a}{n^2} =: v_n$$

qui est un multiple fixe du terme général d'une série de Riemann convergente. Il en résulte que la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur $[-a, a]$, puisqu'elle admet sur cet intervalle la série majorante convergente $\sum a n^{-2}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} . Donner une expression de $g'(0)$.

On vérifie d'abord que chaque fonction u_n est dérivable sur \mathbb{R} . On a en effet $u'_n(x) = \cos(x/n)/n^2$. Ensuite, puisque $|\cos(y)| \leq 1$ pour tout réel y on aura

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u'_n(x)| = \frac{|\cos(x/n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} =: w_n$$

ce qui montre que la série dérivée $\sum u'_n()$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . Comme $\sum u_n(x)$ converge pour tout x , le théorème de dérivation des séries de fonctions implique que g est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{n^2}.$$

En particulier

$$g'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. La série de fonctions $\sum u_n()$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R} ?

Si on choisit $x = n\pi/2$, on voit que $u_n(x) = \sin(\pi/2)/n = 1/n$, ce qui montre que la norme uniforme de u_n sur \mathbb{R} vérifie l'inégalité $\|u_n\|_{u,\mathbb{R}} \geq 1/n$ (en fait c'est une égalité) et

$$\sum \|u_n\|_{u,\mathbb{R}} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

montre que la série de fonctions ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .

Exercice III

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum 2^n \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

La série est $\sum a_n x^n$ avec $a_n = 2^n/(n(n+2))$, donc

$$a_{n+1}/a_n = 2 \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)};$$

ce quotient tend vers $\ell = 2$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et par conséquent $R = 1/\ell = 1/2$.

2. On pose lorsque $|x| < R$

$$f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

Exprimer $f'(x)$ au moyen d'une série quand $|x| < R$, puis exprimer la dérivée de la fonction $x \rightarrow f'(x)/x$ sur $] -R, 0[$ et $] 0, R[$.

On voit que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$$

est la somme d'une série entière qui converge sur l'intervalle $] -1/2, 1/2[$ donc d'après le cours, la fonction f est indéfiniment dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in] -1/2, 1/2[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{x^{n+1}}{n}.$$

Pour $x \neq 0$ on voit que

$$\frac{f'(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{x^n}{n}$$

mais on peut aussi considérer la fonction h définie sur $] -1/2, 1/2[$ par

$$\forall x \in] -1/2, 1/2[, \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{x^n}{n}.$$

Pour cette nouvelle fonction h , somme d'une série entière, on a quand $|x| < 1/2$

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{n-1} = 2 \sum_{m=0}^{+\infty} (2x)^m = \frac{2}{1-2x}.$$

Pour $x_0 \neq 0$, h coïncide avec $f'(x)/x$ si x est voisin de x_0 , donc la dérivée de $x \rightarrow f'(x)/x$ au point x_0 est égale à $h'(x_0) = 2/(1 - 2x_0)$.

3. Calculer $f'(x)$ quand $|x| < R$ et en déduire que

$$f(x) = \frac{1}{8} (1 - 4x^2) \ln(1 - 2x) + \frac{1}{4} (x^2 + x).$$

Sur $] -1/2, 1/2[$ la fonction $x \rightarrow -\ln(1 - 2x) - h(x)$ a une dérivée nulle, et elle vaut 0 pour $x = 0$ (on note que $h(0) = 0$), donc elle est nulle sur tout l'intervalle. On a donc pour tout $x \neq 0$ de cet intervalle

$$\frac{f'(x)}{x} = h(x) = -\ln(1 - 2x),$$

donc $f'(x) = -x \ln(1 - 2x)$; cette relation est vraie aussi pour $x = 0$ par la continuité de f' . Posons maintenant

$$k(x) = \frac{1}{8} (1 - 4x^2) \ln(1 - 2x) + \frac{1}{4} (x^2 + x)$$

pour $|x| < 1/2$ et calculons $k'(x)$. On trouve

$$k'(x) = \frac{1}{8} (-8x) \ln(1 - 2x) - \frac{2}{8} \frac{(1 - 4x^2)}{1 - 2x} + \frac{1}{4} (2x + 1) = -x \ln(1 - 2x) = f'(x).$$

A nouveau on conclut que $f - k$ est constante sur $] -1/2, 1/2[$, et de plus $f(0) = 0 = k(0)$. On a donc

$$f(x) = k(x) = \frac{1}{8} (1 - 4x^2) \ln(1 - 2x) + \frac{1}{4} (x^2 + x)$$

pour tout point x de l'intervalle.