

Théorie Générale des Classes Caractéristiques Secondaires

A Alexander Grothendieck pour son 60^e anniversaire

MAX KAROUBI

UFR de Mathématiques, URA 212, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 Paris, France.

Adresse électronique: karoubi@FRMAP711.

(Received: February 1989)

Résumé. Dans cet article nous définissons un nouveau foncteur $MK(X)$, ‘ K -théorie multiplicative’ de X , dans lequel prennent leurs valeurs les classes caractéristiques primaires et secondaires connues de fibrés vectoriels munis de structures supplémentaires. Il s’agit notamment des classes caractéristiques de fibrés plats, feuilletés ou holomorphes ainsi que des ‘régulateurs’ en K -théorie algébrique.

Abstract. In this paper we define a new functor $MK(X)$, ‘multiplicative K -theory’ of X , which is the target of known characteristic classes (primary and secondary) of vector bundles provided with additional structures. One should mention characteristic classes of flat, foliated or holomorphic vector bundles as well as ‘regulators’ in algebraic K -theory.

Key words. Characteristic classes, Chern–Weil theory, cyclic homology, foliations, Fredholm modules, λ -rings, holomorphic bundles.

La théorie de Chern–Weil classique [13] permet d’associer aux polynômes invariants sur l’algèbre de Lie \mathcal{G} d’un groupe de Lie G des classes caractéristiques pour les G -fibrés principaux. Ainsi, par exemple, on sait définir pour tout fibré vectoriel (réel ou complexe) des classes de Stiefel–Whitney, de Pontrjagin ou de Chern [23]. Cependant, dans beaucoup de situations géométriques où des G -fibrés munis de structures supplémentaires sont considérés, ces invariants ne décrivent pas la complexité de la situation car ils dépendent seulement de la topologie sous-jacente. L’exemple le plus récent d’une telle situation est la définition de régulateurs $K_{2i-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ où $K_{2i-1}(\mathbb{C})$ désigne la K -théorie algébrique de Quillen, due indépendamment à Beilinson et à l’auteur [3, 19]. Cet exemple a été longuement décrit dans cette dernière référence où il a été généralisé dans le cadre de l’homologie cyclique [9]. L’idée de base est que la K -théorie algébrique peut être définie à partir d’une catégorie bien choisie de fibrés plats. Ces fibrés ont leurs classes caractéristiques rationnelles nulles d’après la théorie de Chern–Weil. Cependant, d’après Borel [3], les groupes $K_{2i-1}(\mathbb{C})$ ne sont pas rationnellement triviaux, d’où la nécessité d’invariants plus fins.

Un autre exemple (plus classique) est celui des fibrés analytiques en droites sur une variété Kählérienne compacte. Comme il est bien connu, ceux-ci sont classifiés par le groupe de cohomologie $H^1(X; \mathcal{O}^*)$ qui s'insère dans la suite exacte de cohomologie faisceautique

$$0 \rightarrow T^h \rightarrow H^1(X; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X; \mathbb{Z})$$

où $T^h = (S^1)^h$ est un tore réel de dimension le rang h du premier groupe de cohomologie réelle $H^1(X)$ et où c_1 est la première classe de Chern. Deux fibrés analytiques L et L' sont topologiquement isomorphes si seulement si $c_1(L) = c_1(L')$ et leur 'différence' est alors représentée par un élément de T^h qui est ainsi un ensemble où prend ses valeurs l'invariant secondaire.

Plus généralement, on peut citer la construction des classes de Chern de fibrés holomorphes ou algébriques dans la cohomologie de Deligne [3] comme autres exemples de classes caractéristiques secondaires.

Dans un ordre d'idées différent, le fibré normal à un feuilletage a des classes caractéristiques nulles au delà de la codimension du feuilletage: c'est le théorème d'annulation de Bott [6]. Pour construire des invariants intéressants, divers auteurs ont introduit des classes caractéristiques secondaires dont le prototype est l'invariant de Godbillon-Vey (cf. [7, 12, 14, 17]).

L'objet de cet article est de décrire une méthode unifiée utilisant la K -théorie pour définir toutes ces classes caractéristiques secondaires. Dans la plupart des exemples géométriques de catégorie \mathcal{C} de fibrés vectoriels où ces classes sont définies, il existe un sous-faisceau remarquable F^1 du faisceau des formes différentielles C^∞ (voir plus loin pour les détails). Un fibré vectoriel appartient alors à la catégorie \mathcal{C} précédente si et seulement si les différentielles des fonctions de transition ont leurs composantes dans F^1 . Une condition plus faible est d'imposer que le caractère de Chern (d'une connexion adaptée) appartient à F^r où $F^r \supset (F^1)^r$. L'exploitation systématique de ce fait permet de définir un groupe de ' K -théorie multiplicative' $MK(X)$ à partir d'une catégorie de fibrés vectoriels munis de connexions appropriées ainsi qu'une factorisation

$$K(X) \rightarrow MK(X) \rightarrow K^{\text{top}}(X)$$

où $K(X) = K(\mathcal{C})$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie \mathcal{C} [5] et où $K^{\text{top}}(X)$ est la K -théorie topologique d'Atiyah et Hirzebruch [1].

L'intérêt du groupe $MK(X)$ est double: d'abord il est calculable en fonction de la K -théorie topologique et de la cohomologie de De Rham de la variété. Ensuite, il contient suffisamment d'informations géométriques pour détecter toutes les classes caractéristiques connues de fibrés plats ou feuilletés (par exemple l'invariant de Godbillon-Vey) et aussi de fibrés holomorphes (F^r étant alors la filtration de Hodge). D'autre part, le groupe $MK(X)$ possède des propriétés algébriques remarquables, comparables à celles des groupes $K(X)$ et $K^{\text{top}}(X)$. Il peut par exemple être muni d'une structure de λ -anneau. Les homomorphismes $K(X) \rightarrow MK(X)$ et $MK(X) \rightarrow K^{\text{top}}(X)$ sont alors des homomorphismes de λ -anneaux.

Plus précisément, la relation entre tous ces invariants est essentiellement contenue dans la suite exacte (S) suivante:

$$K_1^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \rightarrow MK(X) \rightarrow K^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)$$

où $K_1^{\text{top}}(X)$ et $K^{\text{top}}(X)$ désignent la K -théorie topologique d'Atiyah et Hirzebruch et où $\Omega^*(X)$ est le complexe de De Rham.

En faisant le produit de X par des sphères de dimension i (le complexe de De Rham de $X \times S^i$ étant muni d'une filtration adéquate), nous définissons plus généralement des groupes $MK_i(X)$ qui s'insèrent dans des suites exactes analogues (S_i):

$$K_{i+1}^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_r H^{2r-1-i}(\Omega^*(X)/F^r) \rightarrow MK_i(X) \rightarrow K_i^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_r H^{2r-i}(\Omega^*(X)/F^r).$$

Si $K_i(X)$ désigne le groupe de K -théorie algébrique supérieure de Quillen, on montre qu'on a par exemple la factorisation*

$$K_i(X) \rightarrow MK_i(X) \rightarrow K_i^{\text{top}}(X),$$

(F^r) étant alors la filtration de Hodge.

Dans cette rédaction nous nous sommes limités à l'exposé général de cette théorie. Les applications aux classes caractéristiques de feuilletages, de fibrés holomorphes ou algébriques feront l'objet d'un autre article, utilisant largement les techniques développées ici.

Cependant, pour convaincre le lecteur de l'intérêt de cette méthode générale, nous allons décrire de manière très sommaire quelques applications potentielles.

EXEMPLE 1. X est une variété algébrique projective et lisse sur \mathbb{C} et (F^r) est la filtration de Hodge. La suite exacte (S_i) ci-dessus devient alors

$$K_{i+1}^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\gamma_i} \bigoplus_{\substack{p < q + i + 1 \\ [p + q] = [i + 1]}} H^{p,q}(X) \rightarrow MK_i(X) \xrightarrow{\delta_i} K_i^{\text{top}}(X) \rightarrow \bigoplus_{\substack{p < q + i \\ [p + q] = [i]}} H^{p,q}(X)$$

$$\uparrow$$

$$K_i(X)$$

où [] désigne la parité. Tout élément de $\text{Ker } \delta_i$ (donc de $\text{Ker } \delta_i \beta_i$ où $\beta_i : K_i(X) \rightarrow MK_i(X)$) définit une classe secondaire dans le groupe quotient Coker γ_i . On notera les exemples extrêmes $i = 0$ et $i \geq \dim_{\mathbb{C}}(X)$. Le groupe Coker γ_i est alors soit un tore réel $(S^h)^h$, soit un tore complexe $(\mathbb{C}^*)^h$ où h est le rang du groupe $K_{i+1}^{\text{top}}(X)$ qui est aussi celui de la cohomologie $H^{[i+1]}(X)$. En fixant la parité de i et en utilisant la périodicité de Bott, on voit qu'on définit ainsi deux filtrations remarquables de $K_1^{\text{top}}(X)$ et $K^{\text{top}}(X)$ par $\text{Im } \delta_i$ et $\text{Im } \delta_i \beta_i$ qu'il serait intéressant de comparer à celle définie récemment par Friedlander et Lawson (en étendant la théorie à $i < 0$).

* Ce dernier résultat a été trouvé indépendamment par C. Soulé (prépublication IHES) à la suite d'une rédaction préliminaire de cet article (Février 1985) grâce à une méthode différente qui lui a permis aussi d'établir la relation entre les groupes $MK_i(X)$ et la cohomologie de Deligne.

EXEMPLE 2. X est une variété feuilletée. La filtration du complexe de De Rham qui lui est associée est alors définie par $F^r(\Omega^*(X)) = (F^1\Omega^*(X))^r$ où $F^1\Omega^*(X)$ est le $\Omega^*(X)$ -module des formes différentielles s'annulant sur les feuilles. En particulier, $F^r(\Omega^*(X)) = 0$ si r est supérieur à la codimension q du feuilletage. Si E est un fibré feuilleté (c'est à dire plat le long des feuilles), il définit une classe caractéristique fondamentale dans le groupe $MK(X)$ associé. C'est le cas en particulier du fibré normal au feuilletage. En utilisant l'isomorphisme (topologique) de E sur son dual E^* associé à une métrique, on voit que $[E] - [E^*]$ induit une classe $\Sigma \omega_r$ dans le groupe $\oplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r)$ grâce à la suite exacte (S). La classe ω_r appartient en fait au groupe de cohomologie classique $H^{2r-1}(X)$ si $r > q$ car F^r est alors égal à 0. L'invariant de Godbillon-Vey correspond au cas où $r = 2, q = 1$. Les autres invariants de feuilletages s'obtiennent en considérant des polynômes appropriés en ces classes secondaires ω_r et en les classes 'primaires' $c_r \in H^{2r}(F^r)$. Plus de détails seront donnés dans l'article suivant celui-ci.

EXEMPLE 3. X est une variété quelconque et on pose $F^r = 0$ pour $r > 0$. Cet exemple (qui est en fait un cas particulier de l'exemple précédent en considérant X comme une variété feuilletée avec une seule feuille) reste paradoxalement intéressant. On peut alors montrer (cf. [19]) que $MK(X)$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans \mathcal{F} où \mathcal{F} désigne la fibre homotopique de l'application

$$\mathbb{Z} \times BU \xrightarrow{\text{Ch}} K(\mathbb{C}, 2n)$$

et où Ch est induit par le caractère de Chern (dans le cas complexe). Au facteur \mathbb{Z} près, le groupe $MK(X)$ peut alors s'écrire de manière suggestive sous la forme $K_1^{\text{top}}(X; \mathbb{C}^*)$ (K -théorie à coefficients \mathbb{C}^*). En effet, la suite exacte (S) prend la forme suivante:

$$K_1^{\text{top}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1^{\text{top}}(X; \mathbb{C}) \rightarrow K_1^{\text{top}}(X; \mathbb{C}^*) \rightarrow K^{\text{top}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow K^{\text{top}}(X; \mathbb{C})$$

où il est naturel de poser

$$K_{i+1}^{\text{top}}(X; \mathbb{Z}) = K_i^{\text{top}}(X) \quad \text{et} \quad K_i^{\text{top}}(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_r H^{2r-i}(X; \mathbb{C}).$$

Tout fibré plat de base X a une classe naturelle dans le groupe $MK(X)$ [19].

Ajoutons quelques mots à cette introduction pour justifier la terminologie *K-théorie multiplicative* et expliquer l'origine du sujet, indépendamment de l'exemple 3 ci-dessus. Dans le cadre des algèbres de Fréchet A , un groupe $MK_i(A)$ a été défini dans [19] appelé aussi groupe de K -théorie multiplicative de A . Ce groupe s'insère dans une suite exacte

$$K_{i+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{i-1}(A) \rightarrow MK_i(A) \rightarrow K_i^{\text{top}}(A) \rightarrow HC_{i-2}(A)$$

où $HC_*(A)$ désigne l'homologie cyclique d'Alain Connes [11, 12] et $K_i^{\text{top}}(A)$ la K -théorie topologique de A . L'homomorphisme $K_i(A) \rightarrow K_i^{\text{top}}(A)$ de la K -théorie

algébrique de Quillen vers la K -théorie topologique se factorise aussi par la K -théorie multiplicative

$$K_i(A) \rightarrow MK_i(A) \rightarrow K_i^{\text{top}}(A).$$

La relation entre ce groupe $MK_i(A)$ et le groupe $MK_i(X)$ de cet article est obtenue en considérant l'anneau A des fonctions C^∞ sur une variété X et en choisissant pour F^r la 'filtration bête' définie par

$$F^r(\Omega^j(X)) = 0, \quad \text{si } r > j,$$

$$F^r(\Omega^j(X)) = \Omega^j(X), \quad \text{si } r \leq j.$$

En général, le groupe $MK_i(A)$ est relié étroitement au *caractère multiplicatif* des modules de Fredholm [12]. Il serait intéressant de généraliser ces considérations aux variétés feuilletées ou analytiques par des filtrations appropriées du complexe de De Rham 'non commutatif'.

Décrivons maintenant brièvement le contenu de chaque paragraphe:

§1. *L'homomorphisme de Chern-Weil.* Ce paragraphe est pour l'essentiel constitué de rappels de notions déjà connues et exposées dans [13] par exemple. La seule variante est l'utilisation systématique des fonctions de transition qui est faite ici et qui permet d'éviter un formalisme algébrique trop poussé, rendant ainsi l'exposé de la théorie plus accessible aux non spécialistes de géométrie différentielle.

§2. *Version simpliciale de l'homomorphisme de Chern-Weil.* Dans une publication précédente [19], nous avons montré comment des méthodes simpliciales permettent de définir des classes caractéristiques secondaires de fibrés vectoriels plats complexes. Nous étendons ici ce formalisme simplicial à tout G -fibré, G étant maintenant un groupe de Lie quelconque.

§3. *Transgressions supérieures de l'homomorphisme de Chern-Weil.* Si E est un G -fibré principal de base une variété X , nous définissons une théorie de l'homologie nouvelle $\mathbb{H}_r(E)$ liée intimement à la K -théorie algébrique de A (pour $A = C^\infty(X)$). Cette théorie est définie à partir de suites de connexions considérées modulo l'action du groupe de jauge.

§4. *K-théorie multiplicative instable.* Si P est une série invariante sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} , on définit un ensemble $MK^P(X)$ qui s'insère dans une 'suite exacte'

$$[X, G] \rightarrow \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \rightarrow MK^P(X) \rightarrow [X, BG] \rightarrow \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)$$

où F^r est un sous-complexe du complexe de De Rham adapté à la situation géométrique étudiée. L'ensemble $MK^P(X)$ est le réceptacle naturel des classes caractéristiques de G -fibrés partiellement plats (cf. 6.8). On définit aussi des *groupes dérivés* $MK_n^P(X)$ (notés simplement $MK_n(X)$) qui s'insèrent dans des suites exactes du même type.

§5. *K-théorie multiplicative stable.* Ce paragraphe est le coeur de l'article. Ici le groupe G peut être considéré comme $\varinjlim \text{GL}_n(k)$, $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Les propriétés

essentielles du groupe de K -théorie multiplicative $MK(X)$ sont établies en 5.3, 5.7 et 5.8.

§6. *Définition des classes caractéristiques secondaires.* Si D est une connexion de Bott (cf. 6.3) sur le fibré partiellement plat E , le triplet $(E, D, 0)$ définit une classe caractéristique dans l'anneau $MK(X)$. Nous en déduisons l'homomorphisme fondamental $K(X) \rightarrow MK(X)$ (cf. 6.7).

§7. *Relation avec l'homologie cyclique.* En adaptant les méthodes de [19] à notre nouveau cadre, on définit de même des classes caractéristiques secondaires dans le langage de la géométrie différentielle non commutative d'Alain Connes [9].

Appendice A. *Anneau des représentations et polynômes invariants sur un groupe de Lie compact connexe.* On explicite un diagramme commutatif où figurent l'homomorphisme de Chern–Weil, l'anneau des représentations $R(G)$ de G et diverses variantes du caractère de Chern. En utilisant des résultats d'Atiyah et Hirzebruch, il est ainsi montré comment l'étude de l'homomorphisme de Chern–Weil pour les groupes de Lie compacts connexes peut se réduire à celle du caractère de Chern et de la K -théorie. Ceci justifie a posteriori l'intérêt porté au caractère de Chern dans cet article.

Appendice B. *Comparaison entre la K -théorie multiplicative instable et la K -théorie multiplicative stable.*

Appendice C. *Classes primaires et classes secondaires de fibrés multiplicatifs.*

1. L'homomorphisme de Chern–Weil

1.1. Soit G un groupe topologique et soit X un espace topologique. Si \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de X , un G -fibré principal adapté à \mathcal{U} est donné par des 'fonctions de transition' g_{VU} qui sont des applications continues de $U \cap V$ dans G , U et $V \in \mathcal{U}$, vérifiant la propriété de cocycle $g_{WU} = g_{WV} \cdot g_{VU}$ sur $U \cap V \cap W$. Deux tels 'cocycles' g_{VU} et h_{VU} sont dits équivalents s'il existe des applications continues $\lambda_U : U \rightarrow G$, $U \in \mathcal{U}$, telles que

$$\lambda_V g_{VU} = h_{VU} \lambda_U$$

sur $U \cap V$. Si on désigne par $H^1_{\mathcal{U}}(X; G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de cocycles, on suivra Steenrod [25] en définissant $H^1(X; G)$ comme la limite inductive

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} H^1_{\mathcal{U}}(X; G)$$

\mathcal{U} parcourant 'l'ensemble' des recouvrements ouverts de X . Si $G = \mathrm{GL}_n(k)$ avec $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $H^1(X; G)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de k -fibrés vectoriels de rang n (cf. [18] par exemple pour une description détaillée de cette identification). Si X est paracompact, $H^1(X; G)$ s'identifie aussi à l'ensemble des classes d'homotopie $[X, BG]$ où BG est l'espace classifiant du groupe G [23].

1.2. Supposons maintenant que G soit un groupe de Lie et que X soit une variété. Il est bien connu que la classification des G -fibrés principaux topologiques est

équivalente à celle des G -principaux ‘différentiables’ (i.e. définis par des cocycles différentiables, disons de classe C^∞ pour fixer les idées: cf. [25] par exemple). Une ‘connexion’ associée à un cocycle g_{VU} est alors donnée par des formes différentielles de degré un, soit Γ_U , définies sur U , $U \in \mathcal{U}$, et à valeurs dans l’algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe G , vérifiant la condition suivante de cohérence (C) sur $U \cap V$:

$$\Gamma_U = g_{VU}^{-1} \Gamma_V g_{VU} + g_{VU}^{-1} dg_{VU}.$$

Quelques mots sont nécessaires pour préciser les notations et justifier cette définition. La notation ‘ $g^{-1} dg$ ’ est classique pour la forme de Maurer–Cartan ω sur le groupe de Lie G à valeurs dans \mathcal{G} : pour $g \in G$, $\omega : T_g G \rightarrow \mathcal{G}$ est la différentielle de l’application $x \mapsto g^{-1}x$ calculée en $x = g$. La forme $g_{VU}^{-1} dg_{VU}$ est simplement l’image réciproque de ω par l’application $g_{VU} : U \cap V \rightarrow G$. D’autre part, la notation $g^{-1} \Gamma g$ signifie simplement $\text{Ad}(g^{-1})\Gamma$ où $\text{Ad}(g^{-1})$ est l’application adjointe sur l’algèbre de Lie: c’est la différentielle de $x \mapsto g^{-1} \cdot x \cdot g$ évaluée en l’élément neutre.

Une complète justification de la condition de cohérence (C) peut être trouvée dans [13] par exemple. Dans le langage des fibrés vectoriels E (c’est-à-dire si $G = \text{GL}_n(k)$), une connexion sur E peut être définie aussi comme une application k -linéaire $D : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{S}(E \otimes T^*X)$ (où \mathcal{S} désigne l’espace des sections C^∞), vérifiant la condition de Leibnitz $D(s\lambda) = D(s)\lambda + s \otimes d\lambda$ pour une section s et une fonction λ qui est de classe C^∞ . Localement, on a donc les relations $D_U(s_U) = ds_U + \Gamma_U \cdot s_U$ où s_U peut être représentée par une matrice colonne de fonctions C^∞ sur U , soit

$$s_U = \begin{pmatrix} s_U^1 \\ s_U^2 \\ \vdots \\ s_U^n \end{pmatrix}$$

et où Γ_U est une matrice $n \times n$ de 1-formes sur U . La condition de cohérence $s_V = g_{VU} \cdot s_U$ sur les sections locales du fibré vectoriel E se traduit alors par la condition de cohérence (C) au niveau des matrices de 1-formes Γ_U .

Il est important de noter ce que deviennent les formes différentielles Γ_U lorsqu’on remplace le cocycle g_{VU} par un cocycle équivalent $h_{VU} = \lambda_V g_{VU} \lambda_U^{-1}$. L’exemple des fibrés vectoriels nous suggère de poser

$$\Gamma_U = \lambda_U^{-1} \Delta_U \lambda_U + \lambda_U^{-1} d\lambda_U$$

et on a alors $\Delta_U = h_{VU}^{-1} \Delta_V h_{VU} + h_{VU}^{-1} dh_{VU}$. Ceci permet de définir sans ambiguïté une connexion sur un fibré principal de groupe G .

1.3. EXEMPLES. Soit (U_i) , $i \in I$, un recouvrement ouvert de X , $g_{ji} = g_{U_j U_i}$ un cocycle différentiable définissant un G -fibré principal et enfin (α_i) une partition différentiable de l’unité associée au recouvrement ouvert (U_i) . Si on pose $\Gamma_i = \Gamma_{U_i} = \sum \alpha_k(x) g_{ki}^{-1} dg_{ki}$, on définit une connexion Γ sur E , ‘canoniquement’ associée à la partition de l’unité (ceci sera précisé dans le paragraphe suivant). Dans

un autre ordre d'idées, soit E un fibré vectoriel, image d'un projecteur $p : T \rightarrow T$ où T est un fibré trivial (cf. [18] p. 26). Avec les notations de 1.2, on peut définir une connexion D sur E en posant $D(s) = p \cdot ds$. Cette connexion (dite de Levi-Civita) joue un rôle important en homologie de De Rham non commutative [19] et en homologie cyclique [9].

1.4. La 'courbure' d'une connexion définie localement par des formes différentielles Γ_i est définie par l'expression $R_i = d\Gamma_i + \frac{1}{2}[\Gamma_i, \Gamma_i]$. Les R_i sont des formes différentielles de degré 2 à valeurs dans l'algèbre de Lie. L'expression des R_i se simplifie notablement si on suppose $G \subset GL_n(k)$: on peut alors remplacer $\frac{1}{2}[\Gamma_i, \Gamma_i]$ par Γ_i^2 . On trouvera dans une nombreuse littérature (cf. [13] par exemple) une justification de cette définition. Les R_i forment un 'tenseur', c'est-à-dire on a la relation fondamentale

$$R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji} = \text{Ad}(g_{ji}^{-1}) R_j.$$

D'autre part, si E et F sont deux G -fibrés définis par des cocycles (g_{ji}) et (h_{ji}) , un isomorphisme $\mu : E \rightarrow F$ est défini localement par des applications $\mu_i : U_i \rightarrow G$ telles que $h_{ji}\mu_i = \mu_j g_{ji}$. Si Γ est une connexion sur F , son image réciproque $\mu^*\Gamma$ sur E est définie par la formule suivante $\mu_i^{-1} d\mu_i + \mu_i^{-1} \Gamma_i \mu_i$. Le courbure de $\mu^*\Gamma$ est définie localement par $\mu_i^{-1} R_i \mu_i$ où R désigne la courbure de Γ .

1.5. Soit maintenant \mathcal{G}^* l'espace dual de l'algèbre de Lie \mathcal{G} . L'algèbre de Weil $I^*(G)$ est définie comme l'algèbre des invariants de l'algèbre symétrique $S^*(\mathcal{G}^*)$ par l'action adjointe du groupe G . Un élément P appartenant à $I^n(G)$ peut s'identifier à une forme n -linéaire symétrique notée aussi P , soit $P : \mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G} \rightarrow k$ (k étant le corps de base) telle que

$$P(gv_1 g^{-1}, \dots, gv_n g^{-1}) = P(v_1, \dots, v_n).$$

P est appelé polynôme invariant de degré n (la terminologie est justifiée en considérant la fonction polynomiale $v \mapsto P(v, \dots, v)$ qu'on notera par abus d'écriture $P(v)$). Si E est un G -fibré principal muni d'une connexion de courbure R , on désigne par $\omega_E(P, \Gamma)$ la forme différentielle $P(R)$ (cette définition a bien un sens d'après 1.4 puisque $P(R_i) = P(R_j)$ sur $U_i \cap U_j$). Le théorème suivant est classique (cf. [13] par exemple):

1.6. THEOREME. (a) *La forme différentielle $\omega_E(P, \Gamma)$ est fermée.*

(b) *La classe de cohomologie de $\omega_E(P, \Gamma)$ ne dépend pas du choix de la connexion Γ .*

(c) *L'application $I^*(G) \rightarrow H^*(X)$ qui associe à un polynôme invariant P la classe de cohomologie de $\omega_E(P, \Gamma)$ pour un fibré E fixé est un homomorphisme d'algèbres.*

(d) *Cet homomorphisme est naturel (et est appelé l'homomorphisme de Chern-Weil associé au fibré E).*

Dans la démonstration de ce théorème nous remarquerons seulement le fait fondamental suivant: si Γ^0 et Γ^1 sont deux connexions sur E , l'expression

$\Gamma' = (1 - t)\Gamma^0 + t\Gamma^1$ est une connexion ‘polynômiale’ sur $F = \pi^*E$, $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow X$ avec $t \in [0, 1]$. Avec ces notations, la différence $\omega_E(P, \Gamma^1) - \omega_E(P, \Gamma^0)$ est canoniquement la différentielle d’une forme de degré $2n - 1$, à savoir l’intégrale suivante $\int_{t=0}^1 \omega_E(P, \Gamma^t)$.

1.7. EXEMPLE. Le cas le plus intéressant pour nous est celui où $G = GL_q(k)$ avec $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et où $P(R)$ est le polynôme invariant $(1/n!) \text{Tr}(R^n)$. En faisant $q = \infty$, l’homomorphisme de Chern–Weil induit un homomorphisme d’anneaux $K(X) \rightarrow H^{\text{pair}}(X)$ (en sommant suivant tous les n). Le ‘caractère de Chern’ ainsi obtenu a été généralisé récemment dans le cadre de l’homologie cyclique [9, 19]. Nous reviendrons sur la relation entre l’homologie cyclique et la théorie des classes caractéristiques dans le §7.

2. Version simpliciale de l’homomorphisme de Chern–Weil

Une version simpliciale de l’homomorphisme de Chern–Weil a déjà été donnée par Dupont [12]. Nous allons en donner ici une autre version, plus élémentaire (c’est-à-dire n’utilisant pas les variétés simpliciales), qui a été utilisée dans le cadre de l’homologie cyclique dans [19]. Pour la commodité du lecteur nous la rappelons ici. Elle permet de définir très simplement les classes caractéristiques de fibrés plats.

2.1. Soit G un groupe simplicial et soit X un ensemble simplicial. Un G -fibré repéré E sur X est donné de la manière suivante: pour chaque cellule σ de dimension n de X (i.e. $\sigma \in X_n$) et pour chaque couple (i, j) avec i et $j \in \{0, \dots, n\} = [n]$, on se donne un élément $g_{ji}(\sigma) = g_{ji} \in G_n$ tel que la condition de cocycle $g_{ki} = g_{kj} \cdot g_{ji}$ soit satisfaite. Si $\varphi : [p] \rightarrow [n]$ est une application croissante, on peut lui associer $\varphi_X^* : X_n \rightarrow X_p$ et $\varphi_G^* : G_n \rightarrow G_p$ et on a alors la relation

$$\varphi_G^*(g_{\varphi(j)\varphi(i)}(\sigma)) = g_{ji}(\varphi_X^*(\sigma)).$$

Si (E, g_{ji}) et (F, h_{ji}) sont deux tels fibrés repérés, un morphisme $\lambda : E \rightarrow F$ est donné de même pour chaque $\sigma \in X_n$ et $i \in [n]$ par des éléments $\lambda_i = \lambda_i(\sigma) \in G_n$ tels que

$$(1) \quad \varphi_G^*(\lambda_{\varphi(i)}(\sigma)) = \lambda_i(\varphi_X^*(\sigma)),$$

$$(2) \quad h_{ji} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot g_{ji}.$$

On note $\Phi_G(X)$ l’ensemble des classes d’isomorphie de tels G -fibrés repérés.

2.2. EXEMPLE. Soit K un complexe simplicial et soit X l’ensemble simplicial obtenu par un ordre de ses sommets. Si G est un groupe topologique, on lui associe le groupe simplicial (noté encore G) défini par $G_n = \text{Hom}(\Delta^n, G)$, ensemble des applications continues du simplexe type Δ^n dans G . Si E est un G -fibré principal sur K , on peut lui associer un fibré repéré sur X de la manière suivante. Pour chaque sommet m désignons par $S(m)$ l’étoile de m . Le fibré E est alors trivial sur $S(m)$ car cet espace est contractile. Si $\sigma \in X_n$ et $i, j \in [n]$, on définit $g_{ji}(\sigma)$ comme étant $h_{\beta\alpha}|_\sigma$ où les $(h_{\beta\alpha})$ représentent les fonctions de transition associées au recouvrement $\{S(m)\}$ de K , les entiers i et j correspondant aux sommets α et β de σ .

2.3. EXEMPLE. Soit M une variété et soit $\mathcal{U} = (U_r)$ un recouvrement ouvert localement fini de M . Soit X le nerf de \mathcal{U} , c'est-à-dire l'ensemble des suites (r_0, \dots, r_n) telles que $U_{r_0 \cap \dots \cap r_n} \neq \emptyset$. Soit maintenant G un groupe de Lie. On peut lui associer un groupe simplicial (noté encore G) en posant $G_n = C^\infty(\Delta^n, G)$. Soit E un G -fibré repéré sur X . Si (μ_r) est une partition de l'unité associée au recouvrement (\mathcal{U}) on peut définir un fibré C^∞ au sens usuel sur M grâce à des fonctions de transition construites de la manière suivante. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, soit σ le simplexe $\{r_0, \dots, r_n\}$ formé des indices r_i tel que $\mu_{r_i}(x) \neq 0$; on pose alors $h_{\beta\alpha}(x) = g_{ji}(\mu(x))$ si $\beta = r_j$ et $\alpha = r_i$. La correspondance $(g) \mapsto (h)$ définit en fait un foncteur de la catégorie des G -fibrés repérés sur X dans celle des G -fibrés sur la variété M . Ce foncteur est une équivalence de catégories si les intersections $U_{r_0 \cap \dots \cap r_n}$ sont vides ou contractiles d'après le théorème suivant prouvé dans [19].

2.4. THEOREME. Soit X un ensemble simplicial et soit G un groupe simplicial. Alors l'ensemble $\Phi_G(X)$ des classes d'isomorphie de G -fibrés repérés sur X est naturellement isomorphe à l'ensemble $[X, BG]$ formé des classes d'homotopie de X dans l'espace classifiant BG .

2.5. On peut maintenant décrire la version simpliciale de l'homomorphisme de Chern–Weil en considérant le groupe simplicial construit en 2.3 à partir d'un groupe de Lie G . De manière plus précise, si E est un G -fibré sur un ensemble simplicial quelconque X , une connexion simpliciale sur E est la donnée pour chaque cellule σ de X_n et pour $i \in [n]$ d'une forme différentielle $\Gamma_i = \Gamma_i(\sigma) \in \Omega^1(\Delta^n; \mathcal{G})$ telles que

- (1) $\Gamma_i(\varphi^* \sigma) = \varphi^*(\Gamma_{\varphi(i)}(\sigma))$ pour $\varphi : [p] \rightarrow [n]$ application croissante,
- (2) $\Gamma_i = g_{ji}^{-1} dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji}$.

Les calculs faits sur une variété se transposent alors pratiquement tels quels pour un ensemble simplicial et permettent de définir un homomorphisme à la Chern–Weil $I^n(G) \rightarrow H^{2n}(X)$. Ici la cohomologie $H^*(X)$ (à coefficients dans $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est celle des formes différentielles de De Rham–Sullivan sur X (cf. [8]).

2.6. On peut interpréter ce qui précède de manière légèrement différente en suivant de près [8] §5. Prenons ainsi comme modèle de l'espace d'Eilenberg–MacLane $K(k, m)$ le groupe abélien simplicial $Z^m : s \mapsto Z^m(\Delta^s)$ où $Z^m(\Delta^s)$ désigne le k -espace vectoriel des formes différentielles fermées (resp. quelconques) sur le simplexe type Δ^s . Si G est un groupe de Lie, on a alors une application simpliciale bien définie $BG \rightarrow K(k, 2n) = Z^{2n}$ associée à un polynôme invariant P de degré n . De manière plus précise, la connexion 'canonique' sur le fibré universel sur BG est définie par la formule (cf. [19]) $\Gamma_i = \sum x_k g_{ki}^{-1} dg_{ki}$. Ici les x_k désignent les coordonnées barycentriques d'une cellule $\sigma = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ avec $g_{ki} = g_k g_i^{-1}$. En outre, $g_i \in G_n = C^\infty(\Delta^n, G)$. Comme dans 1.6, on en déduit un homomorphisme $I^n(G) \rightarrow H^{2n}(BG)$ associé à un polynôme invariant de degré n (comparer avec

Dupont [13]). La relation avec l'homomorphisme de Chern-Weil sur une variété M se voit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I^n(G) & \rightarrow & H^{2n}(BG) \\ & \searrow & \swarrow \theta^* \\ & & H^{2n}(M) \end{array}$$

où θ est l'application classifiante du fibré différentiable E sur M (cf. 2.3). Il est bien connu (H. Cartan) que l'homomorphisme $I^n(G) \rightarrow H^{2n}(BG)$ est un isomorphisme si G est compact (cf. [13]). Dans le cas général, cet homomorphisme n'est ni injectif, ni surjectif.

2.7. Plus généralement, si $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots$ est une série invariante (chaque P_n étant de degré n), P induit une application simpliciale $c(P) : BG \rightarrow \Pi K(k, 2n)$.

D'autre part, si on désigne par Ω^n le groupe abélien simplicial $s \mapsto \Omega^n(\Delta^s)$ on a une fibration de Kan d'espace total acyclique (cf. [8])

$$0 \rightarrow Z^m \rightarrow \Omega \xrightarrow{d} Z^{m+1} \rightarrow 0.$$

On peut donc prendre comme modèle de la fibre homotopique de $c(P)$ le produit fibré \mathcal{F}_p suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_p & \rightarrow & \Pi \Omega^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \rightarrow & \Pi Z^{2n} \end{array}$$

2.8. THEOREME. Soit G^δ le groupe de Lie G muni de la topologie discrète. Alors l'application évidence $BG^\delta \rightarrow BG$ se factorise canoniquement à travers \mathcal{F}_p :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_p & \\ & \nearrow \downarrow & \\ BG^\delta & \rightarrow & BG \\ & \searrow \downarrow & \\ & & \Pi K(k, 2n) \end{array}$$

Démonstration. Pour un simplexe σ de BG^δ , la formule définissant $\omega_E(P, \Gamma_i)$ montre qu'elle est réduite à 0 (E désignant le fibré universel sur BG). Par conséquent, l'application composée $BG^\delta \rightarrow BG \rightarrow \Pi Z^{2n}$ est aussi réduite à 0. On en déduit de manière triviale le relèvement cherché.

2.9. Le théorème précédent est particulièrement intéressant si $G = GL_m(\mathbb{C})$, l'application $BG \rightarrow \Pi K(\mathbb{C}, 2n)$ étant le caractère de Chern. En faisant tendre m vers l'infini et en appliquant la construction + de Quillen, on en déduit un homomorphisme

fondamental

$$K_{2i-1}(\mathbb{C}) = \pi_{2i-1}(BGL(\mathbb{C})^+) \rightarrow \pi_{2i-1}(\mathcal{F}_p) \approx \mathbb{C}^*$$

qui est un isomorphisme sur la torsion et détecte le régulateur de Borel [4, 19].

2.10. Soit maintenant $\alpha_n: \mathbb{Z} \rightarrow k$ une inclusion telle que la classe caractéristique $BG \rightarrow K(k, 2n)$ se factorise à travers $K(\mathbb{Z}, 2n)$ par $(\alpha_n)_*$. On a donc le diagramme commutatif à homotopie près suivant

$$\begin{array}{ccc} BG & \rightarrow & K(\mathbb{Z}, 2n) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & K(k, 2n) \end{array}$$

qu'on peut aussi écrire

$$\begin{array}{ccc} BG & \xrightarrow{u} & K(k, 2n) \\ \downarrow & & \parallel \\ K(\mathbb{Z}, 2n) & \xrightarrow{v} & K(k, 2n) \end{array}$$

On en déduit une application de la fibre homotopique de u dans celle de v , soit de \mathcal{F}_p dans $K(k/\mathbb{Z}, 2n - 1)$. Cette application est bien définie à homotopie près car l'ambiguïté de l'application de \mathcal{F}_p dans $K(k/\mathbb{Z}, 2n - 1)$ est attachée à une application de BG dans $\Omega(K(k, 2n))$, soit essentiellement un élément de la k -cohomologie impaire de BG qui est nulle.

D'après le théorème 2.7, on en déduit donc par composition une application

$$BG^\delta \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow K(k/\mathbb{Z}, 2n - 1),$$

soit une classe caractéristique secondaire appartenant à $H^{2n-1}(BG^\delta; k/\mathbb{Z})$ associée à un polynôme invariant P . Par exemple, si $k = \mathbb{C}$, $G = GL_r(\mathbb{C})$ et si P est associé à la $n^{\text{ième}}$ classe de Chern, on peut choisir $\alpha_n = (2i\pi)^n$ et on trouve les classes caractéristiques de Chern–Cheeger–Simons [19].

3. Transgressions supérieures de l'homomorphisme de Chern–Weil

3.1. Dans les deux premiers paragraphes nous avons vu comment définir des classes caractéristiques de G -fibrés principaux (G étant un groupe de Lie muni de sa topologie usuelle ou de la topologie discrète) associées à des polynômes ou des séries invariantes. Ceci a été fait dans un contexte différentiable ou simplicial. Afin de préparer le terrain pour la K -théorie multiplicative développée dans le paragraphe suivant, nous allons maintenant définir des 'transgressions supérieures' de l'homomorphisme de Chern–Weil. Nous nous placerons dans le contexte différentiable pour fixer les idées.

3.2. Soit donc P un polynôme invariant de degré n sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe de Lie G et soient $D^0, D^1, \dots, D^r, r + 1$ connexions sur un G -fibré principal E . Soit

Δ^r le r -simplexe standard paramétrisé par des variables positives $t = (t_0, t_1, \dots, t_r)$ telles que $\sum_{i=0}^r t_i = 1$. Soit D' la connexion $t_0 D^0 + t_1 D^1 + \dots + t_r D^r$ sur π^*E avec $\pi : \Delta^r \times X \rightarrow X$ projection canonique. Soit R' la courbure associée à D' et soit $P(R')$ la forme différentielle sur $\Delta^r \times X$ définie par la formule $\omega_E(P, D')$ de 1.5. On pose alors $\Theta_r(D^0, D^1, \dots, D^r) = \int_{\Delta^r} P(R)'$.

On pourra comparer cette formule avec celle de 1.6; ici l'intégrale est considérée par rapport aux paramètres t_i dont les différentielles dt_i sont placées en tête des formes (ce qui évite les problèmes de signes). Ainsi $\Theta_r(D^0, D^1, \dots, D^r)$ est une forme différentielle de degré $2n - r$ sur X : c'est la $r^{\text{ème}}$ transgression de la forme $\omega_E(P)$ de 1.6. Elle est invariante par le groupe de jauge \mathbb{G} , c'est-à-dire le groupe des automorphismes de E . Cette forme n'est pas fermée en général, mais vérifie la propriété suivante

3.3. THEOREME. *On a la formule*

$$d\Theta_r(D^0, D^1, \dots, D^r) = - \sum_{i=0}^r (-1)^i \Theta_{r-1}(D^0, \dots, \hat{D}^i, \dots, D^r)$$

Démonstration. Sur $\Delta^r \times X$ notons d_X (resp. d_r) la différentielle extérieure des formes dans la direction X (resp. Δ^r). En différenciant sous le signe somme, on a alors (d'après la formule de Stokes):

$$\begin{aligned} d\Theta_r(D^0, \dots, D^r) &= \int_{\Delta^r} d_X P(R') = - \int_{\Delta^r} d_r P(R') = - \int_{\partial \Delta^r} P(R') \\ &= - \sum_{i=0}^r (-1)^i \Theta_{r-1}(D^0, \dots, \hat{D}^i, \dots, D^r). \end{aligned}$$

3.4. A tout fibré principal E on peut associer un groupe abélien simplicial M_* qui est le suivant: M_r est le groupe abélien libre engendré par les suites (D^0, D^1, \dots, D^r) où les D^i sont des connexions sur E . Si $\varphi : [s] \rightarrow [r]$ est une application croissante, $\varphi^* : M_r \rightarrow M_s$ est définie par $\varphi^*(D^0, D^1, \dots, D^r) = (\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^s)$ avec $\nabla^i = D^{\varphi(i)}$. D'autre part, le groupe de jauge \mathbb{G} des automorphismes de E opère à droite sur M de manière évidente: pour $g \in \mathbb{G}$, on pose

$$(D^0, D^1, \dots, D^r) \cdot g = (g^*D^0, g^*D^1, \dots, g^*D^r).$$

Le quotient $N_* = M_*/\mathbb{G}$ est aussi un groupe abélien simplicial. On notera $\mathbb{H}_r(E)$ son homologie. Si c est une chaîne de dimension $2n - r$ de la variété X (avec $r \leq n$) et si $\sigma = (D^0, D^1, \dots, D^r)$ est une suite de $r + 1$ connexions sur E , on pose

$$\langle c, \sigma \rangle = \int_c \Theta_r(D^0, D^1, \dots, D^r).$$

D'après le théorème 3.3, on a alors

$$\langle c, \partial \sigma \rangle = - \int_c d\Theta_r(D^0, D^1, \dots, D^r) = - \int_{\partial c} \Theta_r(D^0, \dots, D^r) = - \langle \partial c, \sigma \rangle.$$

De cette identité il résulte immédiatement les deux assertions suivantes (en remplaçant σ par une combinaison linéaire formelle de 'chaines' (D^0, D^1, \dots, D^n)):

- (1) Si σ est un cycle dans le complexe définissant $\mathbb{H}_r(E)$, la fonction $c \mapsto \langle c, \sigma \rangle$ est un cocycle singulier de la variété X . En effet, $\langle \partial c, \sigma \rangle = -\langle c, \partial \sigma \rangle = 0$.
- (2) Si σ est un bord dans le complexe définissant $\mathbb{H}_r(E)$, la fonction $c \mapsto \langle c, \sigma \rangle$ est un cobord singulier de la variété X . En effet, si $\sigma = \partial \sigma'$, on a $\langle c, \sigma \rangle = -\langle \partial c, \sigma' \rangle$.

3.5. Des considérations précédentes, on déduit un homomorphisme bien défini $\mathbb{H}_r(E) \rightarrow H^{2n-r}(X)$ pour $0 \leq r \leq n$ et tout fibré principal E , associé à un polynôme invariant de degré n . Si $r = 0$, on notera que cet homomorphisme est essentiellement défini par l'homomorphisme de Chern-Weil.

3.6. REMARQUE. En fait, $\mathbb{H}_r(E)$ est l'homologie de l'ensemble simplicial $D(E)$ formé des suites de connexions à une transformation du groupe de jauge près. Il serait évidemment intéressant de connaître la topologie de $D(E)$. Dans le cas où E est trivial, on a une application évidente $B\mathbb{G}^\delta \rightarrow D(E)$ (\mathbb{G}^δ désignant le groupe de jauge muni de la topologie discrète). Si par exemple G est le groupe linéaire 'infini' $GL(\mathbb{C}) = \cup_m GL_m(\mathbb{C})$ et si P est la $n^{\text{ème}}$ composante du caractère de Chern, l'homomorphisme composé

$$K_r(A) \simeq \pi_r(B\mathbb{G}^{\delta+}) \rightarrow H_r(B\mathbb{G}^\delta) \rightarrow H_r(D(E)) \rightarrow H^{2n-r}(X)$$

avec $A = C^\infty(X)$, s'identifie à celui défini par les méthodes de l'homologie cyclique dans [19]. En particulier, on a une autre factorisation

$$K_r(A) \rightarrow K_r^{\text{top}}(A) \approx K^{-r}(X) \xrightarrow{\text{ch}_n} H^{2n-r}(X).$$

Puisque l'image de ch_n est un réseau dans l'espace vectoriel $H^{2n-r}(X)$, on voit que le problème essentiel est de comparer la K -théorie algébrique et la K -théorie topologique de A . Par exemple, il est trivial que l'homomorphisme $K_1(A) \rightarrow K_1^{\text{top}}(A)$ est surjectif. D'après Milnor [22], on sait aussi que l'image de l'homomorphisme $K_2(A) \rightarrow K_2^{\text{top}}(A)$ contient $\pi_1(SL(A))$. Si X est simplement connexe par exemple, cet homomorphisme est surjectif. En conclusion, on voit donc que l'espace $D(E)$ peut être considéré comme une 'déstabilisation' de la K -théorie algébrique de A .

3.7. REMARQUE. Ce qui a été dit précédemment suggère une version 'non discrète' de l'ensemble simplicial $D(E)$. De manière plus précise, en copiant les méthodes d'homotopie et d'homologie singulières, il convient de remplacer l'ensemble simplicial $D(E)$ par l'espace simplicial correspondant qui tient compte de la topologie de l'espace des connexions. Il revient au même d'introduire la diagonale de l'ensemble bisimplicial $D(E_*)$ défini par des suites de connexions sur $\pi_n^* E$ où $\pi_n: \Delta^n \times X \rightarrow X$. En notant $\mathbb{H}_r(E_*)$ l'homologie de cette diagonale, on a de même un homomorphisme $\mathbb{H}_r(E_*) \rightarrow H^{2n-r}(X)$ pour $0 \leq r \leq 2n$ (noter le changement d'intervalle) avec une factorisation $\mathbb{H}_r(E) \rightarrow \mathbb{H}_r(E_*) \rightarrow H^{2n-r}(X)$ pour $0 \leq r \leq n, \dots$

4. K-Théorie multiplicative instable

4.1. Soit G un groupe de Lie et soit X une variété. Nos données de base dans ce paragraphe sont les suivantes:

- (a) Une 'série invariante' $P = P_1 + P_2 + \dots$ avec $P_r \in I'(G)$, dans le sens de 1.5 et 2.7.
- (b) Un sous-complexe F^r pour tout $r = 0, 1, 2, \dots$ du complexe de De Rham de la variété X . On posera $\tilde{F}^r = F^r + B^r$, B^r désignant l'espace des formes exactes.

Si E est un G -fibré différentiable sur X et si D est une connexion sur E , on notera par abus d'écriture $P(D)$ (resp $P_r(D)$) la série invariante P (resp le polynôme invariant P_r) appliquée à la courbure R associée à D d'après la construction détaillée en 1.5. Rappelons un résultat du paragraphe précédent: si D^0 et D^1 sont deux connexions sur E , on a $P_r(D^1) - P_r(D^0) = d(\Theta_1^r(D^0, D^1))$ avec

$$\Theta_1^r(D^0, D^1) = \int_{t=0}^1 P_r((1-t)D^0 + tD^1)$$

(cf. 3.3).

4.2. DEFINITION. un ' G -fibré multiplicatif' est un triplet $\xi = (E, D, \omega)$ où E est un G -fibré principal sur X , D une connexion sur E et $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$ (avec $\omega_r \in \Omega^{2r-1}(X)$) une somme de formes différentielles telle que $P_r(D) \equiv d\omega_r \pmod{F^r}$. Si $\xi' = (E', D', \omega')$ est un autre fibré multiplicatif de même base, un morphisme $\xi \rightarrow \xi'$ est donné par un isomorphisme $\alpha : E \rightarrow E'$ de fibrés sous-jacents tel que

$$\omega'_r - \omega_r \equiv \Theta_1^r(D, \alpha^*D') \pmod{\tilde{F}^r}$$

Pour donner un sens à cette définition, il convient de vérifier que la composition de deux morphismes (dans un sens évident) est bien un morphisme. Autrement dit, si

$$\alpha : (E^0, D^0, \omega^0) \rightarrow (E^1, D^1, \omega^1) \quad \text{et} \quad \beta : (E^1, D^1, \omega^1) \rightarrow (E^2, D^2, \omega^2)$$

sont deux morphismes, il en est de même de $\beta\alpha : (E^0, D^0, \omega^0) \rightarrow (E^2, D^2, \omega^2)$. Par transport de structure, on peut d'abord supposer que $E^0 = E^1 = E^2$ et que les morphismes de fibrés sous-jacents sont réduits à l'identité. En suivant 3.2, considérons maintenant l'intégrale suivante

$$\Theta_2(D^0, D^1, D^2) = \int \int_{\Delta^2} P(t^0D^0 + t^1D^1 + t^2D^2)$$

où (t^0, t^1, t^2) représentent les coordonnées barycentriques dans Δ^2 . D'après la formule de Stokes, on a alors

$$d\Theta_2(D^0, D^1, D^2) = \Theta_1(D^1, D^2) - \Theta_1(D^0, D^2) + \Theta_1(D^0, D^1).$$

Si

$$\Theta_1(D^0, D^1)_r \equiv \omega_r^1 - \omega_r^0 \quad \text{et} \quad \Theta_1(D^1, D^2)_r \equiv \omega_r^2 - \omega_r^1 \pmod{\tilde{F}^r},$$

on a $\Theta_1(D^0, D^2)_r \equiv \omega_r^2 - \omega_r^0$ puisque \tilde{F}^r contient les formes exactes.

4.3. REMARQUE. On notera qu'on a utilisé la formule de Stokes pour démontrer l'existence d'une catégorie, ce qui n'est pas fréquent!

4.4. EXEMPLES. Choisissons $F^r = 0$ sauf pour $r = 0$ et considérons un G -fibré plat E . La connexion plate D associée à E est définie par $\Gamma_U = 0$ en coordonnées locales (cf. 1.2). Pour toute série invariante P , on voit ainsi que le triplet $(E, D, 0)$ définit un G -fibré multiplicatif sur X . Comme autre exemple, on peut considérer le cas d'un groupe de Lie complexe G et d'un G -fibré holomorphe E sur une variété analytique complexe X . Un tel fibré peut être muni d'une connexion D partiellement holomorphe ($D' = d''$) dont la courbure associée ne contient pas de formes du type $(0, 2)$. En choisissant pour F^r la filtration de Hodge, on voit que le triplet $(E, D, 0)$ définit encore un fibré multiplicatif sur X .

4.5. REMARQUE. La terminologie 'fibré multiplicatif' est justifiée dans [19].

4.6. THEOREME. Notons $MK^P(X)$ (ou simplement $MK(X)$) l'ensemble des classes d'isomorphie de G -fibrés multiplicatifs (c'est-à-dire l'ensemble des composantes connexes de la catégorie précédente). On a alors la 'suite exacte'

$$[X, G] \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \xrightarrow{v} MK(X) \xrightarrow{u} [X, BG] \xrightarrow{\sigma} \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)$$

avec les notations expliquées ci-dessous.

Explication des notations: $[X, BG]$ représente l'ensemble des classes d'homotopie de X dans BG , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphie de G -fibrés principaux. L'application σ associe à tout fibré E l'image dans $H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)$ de la classe caractéristique $P_r(D)$ définie dans $H^{2r}(X) = H^{2r}(\Omega^*(X))$ (cf. 1.6), où D est une connexion quelconque sur E . L'application u associe au fibré multiplicatif $\xi = (E, D, \omega)$ le fibré E sous-jacent. L'ensemble $MK(X)$ est pointé par $0 = (T, d, 0)$, où T est le fibré trivial, d la connexion triviale. Le groupe $\bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r)$ opère sur $MK(X)$ par l'action suivante $\omega' \cdot (E, D, \omega) = (E, D, \omega' + \omega)$.

On pose alors $v(\omega') = \omega' \cdot 0$. Enfin, l'application σ_1 (en fait un homomorphisme) associe à la classe d'homotopie de l'application $\alpha : X \rightarrow G$ l'élément $\Theta_1(d, \alpha^*d)$ où d est la connexion triviale et α^*d son image réciproque par α considéré comme automorphisme du fibré trivial $X \times G$. De manière plus explicite, on a

$$\begin{aligned} \Theta_1^*(d, \alpha^*d) &= \int_{t=0}^1 P_r((1-t)d + t\alpha^*d) \\ &= \int_{t=0}^1 P_r(dt \wedge \alpha^{-1} d\alpha - t(\alpha^{-1} d\alpha)^2 + t^2(\alpha^{-1} d\alpha)^2) \\ &= \int_{t=0}^1 P_r((t^2 - t)(\alpha^{-1} d\alpha)^2 + dt \wedge \alpha^{-1} d\alpha). \end{aligned}$$

Démonstration de l'exactitude de la suite

- L'identité $\sigma \cdot u = 0$ est claire.
- Soit E un G -fibré sur X tel que $\sigma(E) = 0$. Pour tout r et pour toute connexion D sur E , il existe ω_r tel que $P_r(D) \equiv d\omega_r \pmod{F^r}$. Donc $E = u(x)$ où x est la classe du fibré multiplicatif (E, D, ω) .
- L'exactitude en $MK(X)$ doit être comprise dans le sens suivant:

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r)$$

tel que $y = \omega' \cdot x$ pour l'action du groupe $\bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r)$ sur l'ensemble $MK(X)$ décrite précédemment. Cette exactitude est facile à vérifier: en effet, si (E, D, ω) et (E', D', ω') sont deux fibrés multiplicatifs tels que $E \approx E'$, on peut sans restreindre la généralité supposer que $E = E'$; en outre (E, D', ω') est isomorphe à (E, D, ω'') où ω'' est choisie en sorte que $\omega'' - \omega' = \Theta'_1(D, D')$. Dans ce cas, $\omega'' - \omega_r$ définit une classe de cohomologie dans $H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r)$.

- Si α est un automorphisme du fibré trivial $T = X \times G$, on a

$$v(\sigma_1(\alpha)) = (T, d, \Theta_1(d, \alpha^*d)) \approx (T, d, 0) = 0.$$

- Réciproquement, si $v(\omega) = 0$, on a $(T, d, \omega) \approx (T, d, 0)$. D'après la définition des isomorphismes, il existe donc un automorphisme α du fibré trivial T tel que $\omega_r - 0 = \omega_r \equiv \Theta'_1(d, \alpha^*d) \pmod{F^r}$.

4.7. Supposons maintenant que $F^r\Omega^*(X)$ et $d(F^r\Omega^*(X))$ soient des sous-complexes fermés de $\Omega^*(X)$ (ce qui sera le cas dans tous les exemples géométriques). Si S est une variété qui joue un rôle de paramètre, on pose alors $F^r(\Omega^*(S \times X)) = \Omega^*(S) \hat{\otimes} F^r\Omega^*(X)$ (produit tensoriel topologique dans le sens de Grothendieck. Notons que $F^r\Omega^*(X)$ est un espace nucléaire. Dans les exemples géométriques, ce sous-complexe peut être décrit directement sans le recours sophistiqué aux PTT [16]). En particulier, avec $S = [0, 1] = I$, on a le théorème suivant:

4.8. THEOREME. *L'ensemble $MK(X)$ est un invariant d'homotopie de X . En d'autres termes, on a un isomorphisme $MK(X) \approx MK(I \times X)$.*

Démonstration. La formule de Künneth étant vraie dans ce contexte (cf. [20]), on a $H^i(\Omega^*(I \times X)/F^r) \approx H^i(\Omega^*(X)/F^r)$. Il suffit alors d'appliquer le lemme des cinq (qui se généralise aisément dans ce contexte) aux deux suites exactes obtenues à partir du théorème 3.6 en considérant X lui-même, puis l'espace $I \times X$ et en utilisant le fait que la classification des G -fibrés sur X est équivalente à celle des G -fibrés sur $I \times X$.

4.9. REMARQUE. Plus généralement, le foncteur $S \mapsto MK(S \times X)$ est un invariant d'homotopie. On peut donc supposer sans problème que S est un CW-complexe fini car un tel S a toujours le type d'homotopie d'une variété de dimension finie.

4.10. THEOREME. Soit S une variété dont la cohomologie est de dimension finie. On a alors des isomorphismes naturels

$$H^n(F^r\Omega^*(S \times X)) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(S) \otimes H^q(F^r\Omega^*X),$$

$$H^n(\Omega^*(S \times X)/F^r\Omega^*(S \times X)) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(S) \otimes H^q(\Omega^*(X)/F^r\Omega^*(X)).$$

Démonstration. Le produit extérieur des formes définit un homomorphisme de complexes

$$\Omega^*(S) \hat{\otimes} F^r\Omega^*(X) \rightarrow F^r\Omega^*(S \times X).$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de voir que cet homomorphisme induit un isomorphisme en cohomologie. Supposons d'abord que S soit une variété de type fini dans le sens de [21], c'est-à-dire réunion finie d'ouverts U_i tels que toute intersection $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_r}$ soit vide ou difféomorphe à \mathbb{R}^n . Pour une telle variété, le théorème résulte d'un argument de Mayer-Vietoris et du lemme de Poincaré. Pour une variété générale S , on utilisera le fait que $S = U \cup V$ avec U, V et $U \cap V$ réunion disjointe de variétés de type fini (cf. [21]) de même que la séparation de la cohomologie de S (cf. [20]).

4.11. Supposons maintenant que S soit une sphère de dimension $n > 0$ (ou plus généralement une sphère homologique). On pose alors

$$MK_n(X) = \text{Ker}(MK(S \times X) \rightarrow MK(X)).$$

On pose de même

$$[X, BG]_n = \text{Ker}([S \times X, BG] \rightarrow [X, BG]),$$

$$[X, G]_n = \text{Ker}([S \times X, G] \rightarrow [X, G]).$$

Le théorème suivant se déduit alors du théorème 4.6 appliqué à $S \times X$.

4.12. THEOREME. On a la suite exacte

$$\begin{aligned} [X, G]_n &\rightarrow \bigoplus_r H^{2r-1-n}(\Omega^*(X)/F^r) \rightarrow MK_n(X) \rightarrow [X, BG]_n \\ &\rightarrow \bigoplus_r H^{2r-n}(\Omega^*(X)/F^r) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit en effet de faire une chasse au diagramme dans les deux suites exactes obtenues à partir du théorème 4.6 en remplaçant X par $S \times X$ et X respectivement.

4.13. REMARQUE. Puisque S^n est un cogroupe à homotopie près, il n'est pas difficile de voir que $MK_n(X)$ est un groupe abélien pour $n > 0$.

5. K-Théorie multiplicative stable

5.1. Nous allons spécialiser les considérations précédentes au cas où G est le groupe linéaire infini $GL(k)$, $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et où P est la série définissant le 'caractère de

Chern' $P = P_1 + P_2 + \dots$ avec

$$P_r(M) = \frac{1}{r!} \text{Trace}(M^r)$$

pour $M \in \text{gl}(k)$, algèbre de Lie de $\text{GL}(k)$. En fait, ceci n'est pas une trop grande perte de généralité car dans beaucoup de cas un polynôme invariant sur un groupe de Lie peut se déduire du caractère de Chern (cf. l'appendice A pour un résultat précis).

En suivant 4.2, on définira donc un fibré vectoriel multiplicatif comme un triplet (E, D, ω) où E est un fibré vectoriel C^∞ , D une connexion sur E et $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$ une somme de formes différentielles de degrés impairs ($\omega_r \in \Omega^{2r-1}(X)$) telle que $\text{ch}_r(D) \equiv d\omega_r \pmod{F^r}$. L'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés multiplicatifs (dans le sens précisé en 4.2) forme un monoïde abélien pour la 'somme de Whitney' des fibrés multiplicatifs:

$$(E, D, \omega) + (E', D', \omega') = (E \oplus E', D \oplus D', \omega + \omega'),$$

ce qui a un sens car $\text{ch}(D \oplus D') = \text{ch } D + \text{ch } D'$, ch désignant le caractère de Chern total qu'on étend en posant $\text{ch}_0(D) = \text{rang } E$ (on convient que $F^0\Omega^*X = \Omega^*X$). On définira $MK(X)$ comme le groupe symétrisé de ce monoïde: cette définition diffère légèrement de celle donnée en 4.6 car nous considérons simultanément tous les groupes $\text{GL}_n(k)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Grâce au lemme et au théorème suivant, il n'est pas difficile de voir que

$$MK(X) \approx \mathbb{Z} \oplus [\varinjlim_n MK^{P^{(n)}}(X)],$$

où $P^{(n)}$ est le caractère de Chern restreint à $\text{GL}_n(k)$, si X est connexe par exemple. On désignera par $d(E, D, \omega)$ la classe du fibré multiplicatif (E, D, ω) dans le groupe $MK(X)$.

5.2. LEMME. Soit $x = d(E, D, \omega)$ un élément de $MK(X)$. Il existe alors un élément $x' = d(E', D', \omega')$ tel que $(E \oplus E', D \oplus D', \omega + \omega')$ soit isomorphe à $(T, d, 0)$ où T est un fibré trivial et d la connexion triviale.

Démonstration. Si E_1 est un supplémentaire de E et D_1 une connexion quelconque sur E_1 , on sait que $\text{ch } D + \text{ch } D_1 = d\theta$ pour une certaine forme θ (cf. [19] 1.22 par exemple). En ajoutant au fibré multiplicatif initial le fibré multiplicatif $(E_1, D_1, -\omega + d\theta)$, on peut ainsi supposer que E est trivial. En considérant l'homotopie de D à la connexion triviale d , on peut aussi supposer que $D = d$. Il suffit de poser alors $E' = E$, $D' = d$ et $\omega' = -\omega$.

5.3. THEOREME. On a la suite exacte

$$K_1^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \xrightarrow{v} MK(X) \xrightarrow{u} K^{\text{top}}(X) \xrightarrow{\sigma} \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)$$

où

$$K^{\text{top}}(X) = [X, \mathbb{Z} \times B \text{GL}(k)] \quad \text{et} \quad K_1^{\text{top}}(X) = [X, \text{GL}(k)]$$

sont les groupes de K -théorie topologique de X .

Démonstration. A quelques détails près, la démonstration de ce théorème est une réplique de celle du théorème 4.6. Plus précisément, les homomorphismes σ_1 , v , u et σ s'explicitent comme suit:

$$\sigma([E]) = [\text{ch}_r(E)],$$

$$u(d(E, D, \omega)) = [E],$$

$v(\omega) = d(T, d, \omega) - d(T, d, 0)$ où T est un fibré trivial (définition indépendante du rang de T).

$\sigma_1(\alpha) = c_r \text{Trace}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$ où α représente un automorphisme d'un fibré trivial et où c_r est la constante rationnelle

$$c_r = (-1)^{r-1} \frac{(r-1)!}{(2r-1)!}.$$

A titre d'exemple, démontrons l'exactitude en $MK(X)$. Soit $y = d(E, D, \omega) - d(T, d, 0)$ un élément de $MK(X)$ (tout élément s'écrit ainsi d'après le lemme précédent) tel que $u(y) = 0$. Quitte à ajouter à E et T le même fibré trivial, on peut supposer que E est isomorphe à T grâce à un isomorphisme α . Il vient alors

$$y = d(E, D, \omega) - d(T, d, 0) = d(T, d, \omega') - d(T, d, 0)$$

avec $\omega'_r = \omega_r + \Theta'_1(0, (\alpha^{-1})^*D)$. Donc $y = v(\omega')$.

Le reste de la démonstration suit le schéma tracé en 4.6 (cf. aussi [19] 7.7).

5.4. Nous allons maintenant utiliser une notion d'homotopie plus faible que celle introduite en 4.7, mais qui sera suffisante dans beaucoup d'applications. Nous dirons que deux fibrés multiplicatifs $\xi^0 = (E^0, D^0, \omega^0)$ et $\xi^1 = (E^1, D^1, \omega^1)$ sont *homotopes* (algébriquement) s'il existe un isomorphisme $\alpha: E^0 \rightarrow E^1$ et une homotopie polynomiale $(D^{(t)}, \omega^{(t)})$, où $D^{(t)}$ doit être interprétée comme une connexion sur le module projectif $\mathbb{R}[t] \otimes E^0$ (cf. [19] §1) telle que $(D^{(0)}, \omega^{(0)})$ soit la donnée de départ (D^0, ω^0) et $D^{(1)} = \alpha^*D^1$, $\omega^{(1)} = \omega^1$. Ici le sous-complexe F^r de $\mathbb{R}[t, dt] \otimes \Omega^*(X)$ est simplement $\mathbb{R}[t, dt] \otimes F^r(\Omega^*(X))$ et on a bien entendu $\text{ch } D' \equiv d\omega' \text{ mod } F^r$.

5.5. LEMME. *Deux fibrés multiplicatifs ξ^0 et ξ^1 sont isomorphes si et seulement si ils sont homotopes.*

Démonstration. Soient ξ^0 et ξ^1 deux fibrés multiplicatifs homotopes. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $E^0 = E^1$ par transport de structure. Puisque $\text{ch}_r D^{(t)} = d\omega_r^{(t)} \text{ mod } F^r$, on a

$$\omega_r^{(u_0)} = \omega_r^{(0)} + \int_{t=0}^{u_0} \text{ch}_r D^{(t)}$$

pour $u = u_0$ fixé; donc $\omega_r^{(1)} = \omega_r^{(0)} + \int_{t=0}^1 \text{ch}_r D^{(t)}$ où $D^{(t)} = D_1^{(t)}$ est une homotopie de D^0 à D^1 . On a par ailleurs l'homotopie 'affine' $D_0^{(t)} = (1-t)D^0 + tD^1$. Posons alors $D_{(\omega)}^{(t)} = (1-u)D_0^{(t)} + uD_1^{(t)}$ et considérons la forme différentielle intégrable double

$\tilde{\omega} = \int_u \int_t \text{ch } D_{(u)}^{(t)}$ avec des notations évidentes. Si on note δ indifféremment la différentielle du complexe $\Omega^*(X)$ ou celle par rapport à X du complexe $\mathbb{R}[t, dt, u, du] \otimes \Omega^*(X)$, on a donc

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\omega} &= \int_u \int_t \delta(\text{ch } D_{(u)}^{(t)}) = \int_u \int_t (-d_t - d_u)(\text{ch } D_{(u)}^{(t)}) \\ &= \int_t \text{ch } D_1^t - \int_t \text{ch } D_0^t - \int_u \text{ch } D_u^1 + \int_u \text{ch } D_u^0. \end{aligned}$$

Puisque $D_u^1 = D^1$ et $D_u^0 = D^0$ les deux dernières intégrales sont nulles (elles ne contiennent pas du) et on obtient donc

$$\delta \tilde{\omega} = \int_t \text{ch } D_1^t - \int_t \text{ch } D_0^t = \int_{t=0}^1 \text{ch } D^{(t)} - \Theta_1(D^0, D^1).$$

Ceci démontre que les fibrés multiplicatifs ξ^0 et ξ^1 sont isomorphes.

Réciproquement, si ξ^0 et ξ^1 sont isomorphes, on peut encore supposer que $E^0 = E^1$ et poser $D^t = (1-t)D^0 + tD^1$ ainsi que $\omega^t = \omega^0 + \int_{u=0}^1 \text{ch}((1-u)D^0 + uD^1)$. On a bien alors $\text{ch } D^t - \text{ch } D^0 = d(\omega^t - \omega^0)$, soit $\text{ch } D^t \equiv d\omega^t \pmod{F^r}$ dans $\mathbb{R}[t, dt] \otimes \Omega^*(X)$.

5.6. A partir de maintenant, nous allons supposer que les sous-complexes F^r vérifient la condition supplémentaire $F^r F^s \subset F^{r+s}$. Cette condition va permettre de définir le produit tensoriel $\xi \otimes \xi'$ des fibrés multiplicatifs $\xi = (E, D, \omega)$ et $\xi' = (E', D', \omega')$ comme le fibré multiplicatif (E'', D'', ω'') avec $E'' = E \otimes E'$, $D'' = D \otimes 1 + 1 \otimes D'$, $\omega'' = \omega \wedge d\omega' + \alpha \wedge \omega' + \omega \wedge \alpha'$ et $\text{ch } D = d\omega + \alpha$, $\text{ch } D' = d\omega' + \alpha'$.

5.7. THEOREME. *Le produit tensoriel des fibrés multiplicatifs induit une structure d'anneau commutatif sur le groupe $MK(X)$.*

Démonstration. On vérifie d'abord que

$$\begin{aligned} \text{ch}_n(D'') &= \sum_{r+s=n} \text{ch}_r(D) \wedge \text{ch}_s(D') \\ &= \sum (d\omega_r + \alpha_r) \wedge (d\omega'_s + \alpha'_s) = \sum d(\omega_{r\wedge} d\omega'_s + \omega_{r\wedge} \alpha'_s + \alpha_{r\wedge} \omega'_s) \end{aligned}$$

modulo F^n (car $F^s F^s \subset F^{r+s}$). D'autre part, si ξ^0 et ξ^1 sont isomorphes, ils sont homotopes. Il en est de même de $\xi^0 \otimes \xi'$ et $\xi^1 \otimes \xi'$ qui sont donc isomorphes d'après le lemme précédent. On démontre de même que $\xi \otimes \xi'^0$ et $\xi \otimes \xi'^1$ sont isomorphes si ξ'^0 et ξ'^1 le sont. Enfin, ω'' peut aussi s'écrire $\omega' \wedge d\omega + \alpha' \wedge \omega + \omega' \wedge \alpha$ mod. les formes exactes, ce qui montre que $\xi' \otimes \xi$ est isomorphe à $\xi \otimes \xi'$. Enfin, un calcul direct montre que

$$(\xi^0 \oplus \xi^1) \otimes \xi' \approx (\xi^0 \otimes \xi') \oplus (\xi^1 \otimes \xi')$$

et que

$$(\xi \otimes \xi') \otimes \xi'' \approx \xi \otimes (\xi' \otimes \xi'')$$

(cf. 5.8 pour les détails). Donc $MK(X)$ est bien un anneau commutatif.

5.8. Afin de formaliser davantage la démonstration précédente, introduisons le groupe intermédiaire $\Gamma(X)$ suivant: il est formé des couples (u, ω) où u est une somme de formes différentielles fermées de degrés pairs sur X et où ω est une somme de formes de degrés impairs, considérées mod. les formes exactes, telle que $u_r \equiv d\omega_r \pmod{F^r}$ ($u_r \in \Omega^{2r}(X)$, $\omega_r \in \Omega^{2r-1}(X)/B^{2r-1}(X)$). On peut alors définir un 'cup-produit' sur $\Gamma(X)$, noté \cup , par la formule suivante

$$(u, \omega) \cup (u', \omega') = (u \wedge u', \omega \wedge d\omega' + \omega \wedge \alpha' + \alpha \wedge \omega')$$

avec $u = \alpha + d\omega$ et $u' = \alpha' + d\omega'$. L'associativité de ce cup-produit peut être vérifiée par le calcul suivant qui est facile, mais fastidieux

$$\begin{aligned} & [(u, \omega) \cup (u', \omega')] \cup (u'', \omega'') \\ &= (u \wedge u', \omega \wedge d\omega' + \omega \wedge \alpha' + \alpha \wedge \omega') \cup (u'', \omega'') \\ &= (u \wedge u' \wedge u'', \omega \wedge d\omega' \wedge d\omega'' + \omega \wedge \alpha' \wedge d\omega'' + \alpha \wedge \omega' \wedge d\omega'' + \omega \wedge d\omega' \wedge \alpha'' + \\ & \quad + \omega \wedge \alpha' \wedge \alpha'' + \alpha \wedge \omega' \wedge \alpha'' + \alpha \wedge \alpha' \wedge \omega''). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & (u, \omega) \cup [(u', \omega') \cup (u'', \omega'')] \\ &= (u, \omega) \cup (u' \wedge u'', \omega' \wedge d\omega'' + \omega' \wedge \alpha'' + \alpha' \wedge \omega'') \\ &= (u \wedge u' \wedge u'', \omega \wedge d\omega' \wedge d\omega'' + \omega \wedge d\omega' \wedge \alpha'' + \omega \wedge \alpha' \wedge d\omega'' + \alpha \wedge \omega' \wedge d\omega'' + \\ & \quad + \alpha \wedge \omega' \wedge \alpha'' + \alpha \wedge \alpha' \wedge \omega'' + \omega \wedge \alpha' \wedge \alpha''), \end{aligned}$$

ce qui conduit bien au même résultat. Il est clair que $\Gamma(X)$ est un anneau dont l'élément unité est $(1, 0)$ (car $F^0 = \Omega^*(X)$).

5.9. Sur l'anneau gradué $\Gamma(X)$ des "opérations d'Adams" Ψ^k peuvent être aussi définies: Ψ^k est la multiplication par k^n sur les couples (u, ω) tels que u soit de degré $2n$. Ces opérations Ψ^k vérifient les relations usuelles

$$\Psi^k(x + y) = \Psi^k(x) + \Psi^k(y), \quad \Psi^k(xy) = \Psi^k(x)\Psi^k(y), \quad \Psi^k(\Psi^l(x)) = \Psi^{kl}(x)$$

(comparer avec [18]). On en déduit une structure de λ -anneau sur l'algèbre graduée $\Gamma(X)$, structure définie par des opérations purement algébriques d'après le formalisme développé dans [18] par exemple. On a ainsi

$$\begin{aligned} \lambda^0(x) &= 1, \\ \lambda^1(x) &= \Psi^1(x) = x, \\ \lambda^2(x) &= \frac{x^2 - \Psi^2(x)}{2} \end{aligned}$$

etc . . .

D'autre part, si E est un fibré vectoriel muni d'une connexion D , on peut munir $E \otimes E \otimes \cdots \otimes E$ (k facteurs) d'une connexion Δ définie par

$$\Delta = D \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes D \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes D$$

dont la courbure est

$$R \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes R \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes R$$

(R étant la courbure de D). Cette connexion et cette courbure sont invariants par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_k . Le caractère de Chern de $\lambda^k(E)$ (en tant que forme différentielle) se calcule donc formellement à partir des fonctions symétriques élémentaires des 'valeurs propres' de R , c'est-à-dire par un polynôme universel en la trace des R^i . En utilisant le principe de scindage en cohomologie (cf. [18] par exemple), on en déduit que $\text{ch}_r(\Psi^k(E)) = k^r \text{ch}_r(E)$ et $\text{ch}(\lambda^k(E)) = \lambda^k(\text{ch } E)$ en désignant par λ^k l'opération sur la \mathbb{Q} -algèbre $Z^{\text{pair}}(X)$ des formes différentielles fermées de degré pair déduite des Ψ^1 .

En résumé, si $\xi = (E, D, \omega)$ est un fibré multiplicatif, on peut poser

$$\lambda^k(\xi) = (\lambda^k(\xi) = (\lambda^k(E), \lambda^k(D), \sigma^k)$$

où $\lambda^k(D)$ est induite par $D \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes D$ et où σ^k est la deuxième composante de $\lambda^k((\text{ch } D, \omega))$ dans $\Gamma(X)$. En utilisant de nouveau un argument d'homotopie comme en 5.7, puis en passant au groupe de Grothendieck suivant un procédé éprouvé (cf. [18]), il en résulte que les λ^k sont des opérations bien définies sur $MK(X)$. Ainsi $MK(X)$ est un λ -anneau, l'homomorphisme $MK(X) \rightarrow MK^{\text{top}}(X)$ étant un homomorphisme de λ -anneaux.

5.10. En transposant 4.11 dans le cas stable, des groupes $MK_n(X) = \text{Ker}(MK(S^n \times X) \rightarrow MK(X))$ peuvent être définis de la même manière. Par un procédé là aussi éprouvé (cf. [18], §2 par exemple), un cup-produit anticommutatif

$$MK_n(X) \times MK_p(X) \rightarrow MK_{n+p}(X)$$

compatible avec le produit en K -théorie topologique peut être défini. On a enfin la suite exacte

$$\begin{aligned} K_{n+1}^{\text{top}}(X) &\rightarrow \bigoplus_r H^{2r-1-n}(\Omega^*(X)/F^r) \rightarrow MK_n(X) \rightarrow K_n^{\text{top}}(X) \\ &\rightarrow \bigoplus_r H^{2r-n}(\Omega^*(X)/F^r). \end{aligned}$$

6. Définition des classes caractéristiques

6.1. Reprenons les conventions de la fin du paragraphe précédent sur les sous-complexes F^r : on a donc $F^0\Omega^*(X) = \Omega^*(X)$ et $F^r F^s \subset F^{r+s}$. Nous supposons maintenant un peu plus, à savoir que F^r est associé à un faisceau $U \mapsto F^r(\Omega^*(U))$ de Ω^*_X -modules. Soit \mathcal{O} le faisceau d'anneaux défini par $f \in \mathcal{O}(U) \Leftrightarrow df \in F^1(\Omega^1(U))$. Un fibré vectoriel de rang n est dit 'partiellement plat' s'il définit un élément de la cohomologie non abélienne $H^1(X, \text{GL}_n(\mathcal{O}))$. On remarquera que cette définition ne

fait intervenir que le sous-complexe F^1 et qu'elle se généralise de manière évidente à d'autres groupes de Lie que GL_n .

De manière plus précise, un tel fibré est défini par des fonctions de transition g_{ji} telles que leurs différentielles dg_{ji} aient leurs coefficients dans F^1 . Si E (resp E') est représenté par des fonctions de transition g_{ji} (resp g'_{ji}), un morphisme $\alpha : E \rightarrow E'$ est représenté par des matrices (α_i) telles que $g'_{ji}\alpha_i = \alpha_j g_{ji}$ avec les $d\alpha_i$ ayant leurs coefficients dans F^1 . Il convient de noter que cette définition de morphisme est aussi valable pour E et E' de rangs différents. En suivant Grothendieck, la K -théorie correspondante, notée $K(X; F^1)$, ou simplement $K(X)$, peut être définie comme le quotient du groupe libre engendré par les fibrés partiellement plats par le sous-groupe engendré par les relations $[E] = [E'] + [E'']$ associées aux suites exactes

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0.$$

6.2. EXEMPLES. Si $F^1 = 0$, la catégorie de tels fibrés est la catégorie des fibrés plats. Si X est une variété analytique complexe et si F^r est la filtration de Hodge, la catégorie est celle des fibrés holomorphes. Si X est une variété feuilletée et F^1 le sous-complexe engendré par les différentielles transversales, la catégorie est celle des fibrés feuilletés (c'est-à-dire plats le long des feuilles).

6.3. Soit E un fibré défini par des fonctions de transition g_{ji} avec $dg_{ji} \in F^1$. D'après le §1, une connexion D sur E est définie par des matrices Γ_i de formes différentielles de degré 1 sur U_i telles que $\Gamma_i = g_{ji}^{-1} dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji}$. On dit alors que D est une *connexion de Bott* si les coefficients de Γ_i sont dans F^1 . Le fibré E peut toujours être muni d'une connexion de Bott: il suffit de poser $\Gamma_i = \sum \lambda_k g_{ki}^{-1} dg_{ki}$ où (λ_k) est une partition de l'unité associé au recouvrement (U_i) . Si D est une connexion de Bott, $ch_*(D) \in F^r$.

6.4. LEMME. Soient D^0 et D^1 deux connexions de Bott sur le fibré partiellement plat E . Alors les fibrés multiplicatifs $(E, D^0, 0)$ et $(E, D^1, 0)$ sont isomorphes. En particulier, ils définissent le même élément de $MK(X)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'homotopie $(1-t)D^0 + tD^1$ et d'appliquer le lemme 5.5.

6.5. Soient E et E' deux fibrés vectoriels de base X définis par des fonctions de transition g_{ji} et g'_{ji} respectivement. Soient D et D' des connexions de Bott sur E et E' et soit $\alpha : E \rightarrow E'$ un isomorphisme de fibrés compatible avec F^1 (i.e. représenté localement par des matrices α_i telles que $g'_{ji}\alpha_i = \alpha_j g_{ji}$ et $d\alpha_i \in F^1$).

6.6. THEOREME. Avec les notations précédentes, les fibrés multiplicatifs $(E, D, 0)$ et $(E', D', 0)$ sont isomorphes. En particulier, ils définissent le même élément de $MK(X)$.

Démonstration. La matrice de la connexion $\alpha^*(D')$ est définie en coordonnées locales par $\alpha_i^{-1} d\alpha_i + \alpha_i^{-1} \Gamma_i \alpha_i$ qui est bien à coefficients dans F^1 . Donc $(E, D, 0)$ et $(E', D', 0)$ sont isomorphes d'après le lemme précédent.

6.7. THEOREME. La correspondance $E \mapsto d(E, D, 0) = [E]$, où D est une connexion de Bott sur E , induit un homomorphisme du groupe de Grothendieck $K(X)$ vers le groupe de K -théorie multiplicative $MK(X)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'assertion suivante: si

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés partiellement plats, on a la relation $[E] = [E'] + [E'']$. Avec des notations évidentes, on peut écrire

$$g''_{ji}\alpha_i = \alpha_j g'_{ji} \quad \text{et} \quad g''_{ji}\beta_i = \beta_j g_{ji}.$$

Soit maintenant γ un scindage C^∞ de la suite exacte précédente défini par un inverse à droite de β et soit $u: E' \oplus E'' \rightarrow E$ l'isomorphisme défini par la matrice $u_i = (\alpha_i, \gamma_i)$. Donc u^{-1} est représenté par la matrice

$$u_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

où σ_i est l'inverse à gauche correspondant de α_i . Nous avons ainsi les relations

$$(\alpha_i \gamma_i) \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = 1, \quad \text{soit} \quad \alpha_i \sigma_i + \gamma_i \beta_i = 1,$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_i \\ \beta_i \end{pmatrix} (\alpha_i \gamma_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \sigma_i \alpha_i = 1, \quad \sigma_i \gamma_i = 0, \quad \beta_i \alpha_i = 0,$$

et $\beta_i \gamma_i = 1$.

Si D est une connexion de Bott sur E définie par une matrice Γ_i à coefficients dans F^1 , la connexion image réciproque $u^*(D)$ est représentée par la matrice $\Delta_i = u_i^{-1} du_i + u_i^{-1} \Gamma_i u_i$. La matrice $u_i^{-1} du_i$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma_i \\ \beta_i \end{pmatrix} (d\alpha_i \ d\gamma_i) = \begin{pmatrix} \sigma_i d\alpha_i & \sigma_i d\gamma_i \\ \beta_i d\alpha_i & \beta_i d\gamma_i \end{pmatrix}$$

avec $\beta_i d\gamma_i = -d\beta_i \gamma_i \in F^1$. Ainsi Δ_i s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & e_i \end{pmatrix}$$

avec a_i, c_i et $e_i \in F^1$. Cette connexion Δ n'est pas un connexion de Bott mais son caractère de Chern est égal à 0 modulo la filtration (car Δ_i est triangulaire supérieure modulo F^1). Par suite, le même argument d'homotopie que celui utilisé dans la démonstration du lemme 6.4 montre que $[E] = [E'] + [E'']$.

6.8. REMARQUE. Beaucoup d'arguments précédents se généralisent à la K -théorie multiplicative instable. De manière précise, si G est un groupe de Lie, un G -fibré E est dit partiellement plat si la différentielle des fonctions de transition 'appartient à F^1 , c'est-à-dire si $dg_{ji}: \Omega^1(G) \rightarrow \Omega^1(U_i \cap U_j)$ a une image contenue dans

$F^1(\Omega^1(U_{i\cap} U_j))$. De tels fibrés sont classifiés par des groupes de cohomologie non abélienne $H^1(X; \mathbf{G})$ où \mathbf{G} est le faisceau en groupes défini par $\mathbf{G}(U) = \{f: U \rightarrow G \mid df \in F^1\}$. Si ρ est une série invariante, la même méthode permet de définir une application $H^1(X; \mathbf{G}) \rightarrow MK^{(\rho)}(X)$ qui généralise dans un certain sens le théorème 6.6.

7. Relation avec l'homologie cyclique

7.1. Soit A une k -algèbre avec k anneau commutatif de caractéristique 0. En suivant [19], nous définissons une quasi-résolution de A comme une algèbre différentielle graduée $\Omega_*(A)$ telle que $\Omega_0(A) = 0$. L'homologie de De Rham non commutative $\bar{H}_*(A)$ de l'algèbre A (relativement à la quasi-résolution) est l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \bar{\Omega}_0(A) \rightarrow \bar{\Omega}_1(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{\Omega}_n(A) \rightarrow \cdots$$

en posant $\bar{\Omega}_*(A) = \Omega_*(A)/[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$, quotient de $\Omega_*(A)$ par le k -module $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$ engendré par les commutateurs gradués. Si $\Omega_*(A)$ est l'exemple 'universel' (cf. [9] [19]), on a

$$\bar{H}_*(A) = \text{Ker}(\overline{HC}_n(A) \xrightarrow{B} H_{n+1}(A, A))$$

où $\overline{HC}_n(A)$ désigne l'homologie cyclique réduite (cf. [19], th. 2.15).

7.2. Rappelons aussi que dans ce formalisme, une connexion sur un A -module projectif à droite E est un homomorphisme k -linéaire $D: E \rightarrow E \otimes_A \Omega_1(A)$ tel que $D(s\lambda) = D(s)\lambda + s \otimes d\lambda$. Une connexion s'étend aisément au $\Omega_*(A)$ -module $E \otimes_A \Omega^*(A)$ par un homomorphisme k -linéaire (noté encore D) tel que $D(s\omega') = D(s)\omega' + (-1)^{\text{deg}(s)}s \otimes d\omega'$. La courbure $R: E \otimes_A \Omega_*(A) \rightarrow E \otimes_A \Omega_{*+2}(A)$ est définie comme la composée D^2 de D par elle-même. La courbure est un homomorphisme $\Omega_*(A)$ -linéaire. Le 'caractère de Chern' de E muni de la connexion D , soit $\text{ch}_n(E, D)$, est défini comme $1/n! \text{Trace}(R^n) \in \bar{\Omega}_{2n}(A)$: c'est un cycle dans le complexe $\bar{\Omega}_*(A)$ et sa classe d'homologie dans $\bar{H}_*(A)$ est indépendante du choix de la connexion D (cf. [19], §1 pour les détails). Le caractère de Chern définit un homomorphisme additif $\text{ch}_n: K_0(A) \rightarrow \bar{H}_{2n}(A)$ intimement lié au caractère défini indépendamment par A . Connes dans le cadre de l'homologie cyclique [9, 19].

7.3. Pour chaque entier r supposons maintenant donné un sous-complexe \bar{F}^r du complexe $\bar{\Omega}_*(A)$ tel que $d(\bar{F}^r) \subset \bar{F}^r$. On définit un A -module multiplicatif $\xi = (E, D, \omega)$ comme un A -module E avec une connexion D et une suite $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r, \dots)$, avec $\omega_r \in \bar{\Omega}_{2r-1}(A)$, tels que $\text{ch}_r(E, D) \equiv d\omega$, mod. \bar{F}^r . Les morphismes de A -modules multiplicatifs se définissent comme en 4.2. Le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules multiplicatifs sera noté $MK(A)$ (les sous-complexes \bar{F}^r étant sous-entendus).

7.4. THEOREME. On a la suite exacte

$$K_1(A) \rightarrow \prod_1^\infty H^{2r-1}(\bar{\Omega}_*(A)/\bar{F}^r) \rightarrow MK(A) \rightarrow K_0(A) \rightarrow \prod_1^\infty H^{2r}(\bar{\Omega}_*(A)/\bar{F}^r).$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du théorème 5.3. Les homomorphismes s'explicitent de la même manière.

7.5. Supposons maintenant que les sous-complexes \bar{F}^r soient induits par des sous-complexes F^r du complexe $\Omega_*(A)$ vérifiant $F^0 = \Omega_*(A)$ et $F^r \cdot F^s \subset F^{r+s}$. Une connexion D sur un A -module E est dite alors *partiellement plate* si la courbure $R : E \rightarrow E \otimes_A \Omega_2(A)$ se factorise à travers $E \otimes_A F^1 \Omega_2(A)$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{R} & E \otimes_A \Omega_2(A) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & E \otimes_A F^1 \Omega_2(A) \end{array}$$

On peut définir alors une nouvelle catégorie $\mathcal{C}(A)$ de A -modules: les objets sont les A -modules E munis de connexions D partiellement plates. Un morphisme $\alpha : (E, D) \rightarrow (E', D')$ est un homomorphisme de A -modules sous-jacents (noté encore α) tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & E' \\ D \downarrow & & D' \downarrow \\ E \otimes_A \Omega_1 A & & E' \otimes_A \Omega_1 A \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes_A \Omega_1 A / F^1 & \xrightarrow{\alpha \otimes 1} & E' \otimes_A \Omega_1 A / F^1 \end{array}$$

Une suite

$$0 \rightarrow (E', D') \rightarrow (E, D) \rightarrow (E'', D'') \rightarrow 0 \tag{S}$$

de cette catégorie est dite *exacte* si la suite de modules sous-jacents est exacte. On note $G(A)$ le groupe de Grothendieck de cette catégorie $\mathcal{C}(A)$ (le sous-complexe F^1 étant sous-entendu): c'est le quotient du groupe libre engendré par les objets de cette catégorie par le sous-groupe des relations $[E] = [E'] + [E'']$ pour toute suite exacte (S) de cette catégorie.

7.6. EXEMPLES. Soit X une variété C^∞ , $\Omega_*(A) = \Omega^*(X)$ son complexe de De Rham réel, $F^r = 0$ pour $r > 0$. D'après le théorème de Frobenius, il est bien connu que la catégorie précédente est équivalente à celle des fibrés plats (les sections localement constantes s étant définies localement par l'équation différentielle $Ds = 0$). Plus généralement, si X est une variété feuilletée de codimension q , c'est-à-dire définie localement par des formes différentielles indépendantes

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ telles que $d\omega_i = \sum \lambda_j^i \wedge \omega_j$, la filtration F^r du complexe de Rham associé est l'idéal engendré par les produits d'au moins r -formes ω_i (donc $F^r = (F^1)^r$). Les feuilles du feuilletage sont les sous-variétés de codimension q sur lesquelles les formes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ s'annulent simultanément. Toujours d'après le théorème de Frobenius, la catégorie précédente $\mathcal{C}(A)$ est alors équivalente à celle des fibrés feuilletés, c'est-à-dire des fibrés définis par des fonctions de transition localement constantes le long des feuilles (comparer avec 6.2). Il faut noter ici les cas extrêmes $q = 0$ (fibrés plats) et $q = \text{dimension de la variété}$ (fibrés vectoriels usuels).

7.7. EXEMPLE. Dans un autre ordre d'idées, soit X une variété analytique complexe et soit F^r la filtration de Hodge associée au complexe de De Rham complexe. Une conséquence immédiate d'un théorème d'Atiyah–Hitchin–Singer [2] est que la catégorie $\mathcal{C}(A)$ est équivalente à celle des fibrés holomorphes. En particulier, le groupe $G(A)$ est isomorphe au groupe de Grothendieck $K(X)$ (comparer avec 6.1). Si X est une variété algébrique projective complexe, la catégorie $\mathcal{C}(A)$ est même équivalente à celle des fibrés vectoriels algébriques d'après un théorème classique de Serre [24]. Le groupe $K(X)$ est donc bien celui utilisé par Grothendieck dans sa démonstration du théorème de Riemann–Roch (cf. [5]).

7.8. THEOREME. *A tout objet (E, D) de la catégorie $\mathcal{C}(A)$ associons le fibré multiplicatif $(E, D, 0)$. Alors cette correspondance induit un homomorphisme $G(A) \rightarrow MK(A)$ avec la factorisation*

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \longrightarrow & MK(A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & K(A) & \end{array}$$

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème 6.7.

7.9. Comme annoncé dans l'introduction, des applications de ce théorème seront données dans une publication ultérieure.

Appendice A. Anneau des représentations et polynômes invariants associés à un groupe de Lie compact connexe

A.1. Soit G un groupe de Lie compact. Dans cet appendice, on désigne par $I^k(G)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes invariants de degré k sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} . Le produit direct $\prod I^k(G)$ est noté $I^{**}(G)$: c'est un anneau commutatif pour le produit évident $I^k(G) \times I^l(G) \rightarrow I^{k+l}(G)$. D'autre part, $R(G)$ est l'anneau des représentations unitaires de G : c'est l'anneau de Grothendieck associé à la catégorie des représentations $\rho: G \rightarrow U(n)$, $n = 1, 2, \dots$. On définit un *caractère de Chern*

$ch_k : R(G) \rightarrow I^k(G)$ en associant à toute représentation $\rho : G \rightarrow U(n)$ le polynôme invariant

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\rho'} \mathcal{U}(n) \xrightarrow{\sigma_k} \mathbb{R},$$

où ρ' est l'application tangente et où $\sigma_k(X) = (1/i^k) \text{Trace}(X^k)$.

A.2. THEOREME. On a le diagramme commutatif suivant d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{ch_*} & I^{**}(G) \\ \mathcal{O} \downarrow & & \downarrow \Psi \\ K(BG) & \xrightarrow{ch} & H^{**}(BG) \end{array}$$

où \mathcal{O} est l'homomorphisme défini par Atiyah–Hirzebruch [1], Ψ est l'homomorphisme de Chern–Weil et ch le caractère de Chern topologique (convenablement normalisé).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions données dans le §2.

A.3. D'après un théorème de Henri Cartan [13], Ψ est un isomorphisme pour tout groupe de Lie compact. Des exemples simples montrent par ailleurs que ch_* , \mathcal{O} et ch ne sont pas des isomorphismes en général. Nous allons voir cependant, qu'après une complétion convenable, $ch_* : R(G) \rightarrow I^{**}(G)$ peut se transformer en un isomorphisme. De manière précise, soit $\mathcal{O}(G) = \text{Ker}(R(G) \rightarrow \mathbb{Z})$ l'idéal d'augmentation et soit

$$R(G)_{\mathbb{R}}^{\wedge} = \varprojlim_{\leftarrow} R(G)_{\mathbb{R}} / \mathcal{O}(G)_{\mathbb{R}}^n$$

avec

$$R(G)_{\mathbb{R}} = R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(G)_{\mathbb{R}} = \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Il est clair que ch_* induit un homomorphisme $ch^{\wedge} : R(G)_{\mathbb{R}}^{\wedge} \rightarrow I^{**}(G)$ (car $I^{**}(G)$ est complet).

A.4. THEOREME. Si G est un groupe de Lie compact connexe, ch^{\wedge} est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Démonstration. D'après Atiyah–Hirzebruch [1] et Dupont [13], on a le diagramme commutatif suivant (où T désigne un tore maximal et W le groupe de Weyl).

$$\begin{array}{ccc} R(G)_{\mathbb{R}}^{\wedge} & \longrightarrow & I^{**}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(T)_{\mathbb{R}}^{\wedge w} & \longrightarrow & I^{**}(T)^w \end{array}$$

Il est démontré dans ces deux références que les flèches verticales sont des isomorphismes. Puisque W est un groupe fini, on est ainsi ramené à démontrer que $R(T)_{\mathbb{R}}^{\wedge} \simeq I^{**}(T)$ et même seulement $R(S^1)_{\mathbb{R}}^{\wedge} \simeq I^{**}(S^1)$ en décomposant T en

produit. Il est bien connu que $R(S^1) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ et que $\text{ch}(t) = e^x$ si on écrit $I^{**}(S^1) = \mathbb{R}[[x]]$. Puisque l'idéal engendré par $e^x - 1$ coïncide avec l'idéal engendré par x dans $\mathbb{R}[[x]]$, le théorème s'en déduit.

A.5. COROLLAIRE. Soit $P \in I^k(G)$ un polynôme invariant. Alors il existe $\rho \in R(G)_{\mathbb{R}}$ tel que $\text{ch}_k(\rho) = P$.

Ce résultat nous amène à formuler la conjecture suivante:

A.6. CONJECTURE. Soit G un groupe de Lie connexe (non nécessairement compact) et soit $P \in I^k(G)$. Il existe alors une algèbre de dimension finie A et une représentation $\rho : G \rightarrow A^*$ telle que $P(X) = \phi(\rho'(X)^k)$ avec $\phi \in HC^0(A)$, groupe de cohomologie cyclique de dimension 0 de A , ρ' étant l'application linéaire tangente de ρ .

Appendice B. Comparaison entre la K -théorie multiplicative instable et la K -théorie multiplicative stable

B.1. Soit G_n le groupe $GL_n(k)$, $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; soit P le caractère de Chern 'total' $\text{ch}_0 + \text{ch}_1 + \dots + \text{ch}_n + \dots$ et soit P_n le caractère de Chern 'tronqué' $\text{ch}_0 + \text{ch}_1 + \dots + \text{ch}_n$. Avec les notations de 4.6 et 5.1 et les hypothèses de 5.6, on va construire un diagramme commutatif de suites exactes (E_n) et (E)

$$\begin{array}{ccccccc}
 (E_n) & [X, G_n] & \rightarrow & \bigoplus_{r=1}^n H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \rightarrow & MK^{P_n}(X) & \rightarrow [X, BG_n] \rightarrow \bigoplus_{r=1}^n H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r) \\
 & \parallel & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \Phi & \parallel & \downarrow \\
 (E) & [X, G_n] & \rightarrow & \bigoplus_{r=1}^{\infty} H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \rightarrow & MK^P(X) & \rightarrow [X, BG_n] \rightarrow \bigoplus_{r=1}^{\infty} H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r)
 \end{array}$$

Pour comparer les suites exactes (E_n) et (E) , il convient de faire la remarque algébrique suivante. Si R est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif, $\text{ch}_i(R) = (1/i!) \text{Tr}(R^i)$ s'exprime pour $i > n$ comme une fonction polynomiale explicite $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des $x_r = \text{ch}_r(R)$ pour $r \leq n$. En appliquant cette remarque à la matrice de courbure d'une connexion D sur un fibré de rang n , on va en déduire l'application Φ cherchée.

De manière plus précise, considérons un fibré multiplicatif (E, D, ω) définissant un élément de $MK^{P_n}(X)$. On a donc $\text{ch}_r(D) = d\omega_r + \alpha_r$ avec $\alpha_r \in F^r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n$. Pour lui associer un élément de $MK^P(X)$, on écrit le polynôme $P_i(x_1, \dots, x_n)$ défini plus haut comme somme de monômes de la forme $\lambda_j x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_p}$. Remplaçons maintenant chaque x_r par le couple (x_r, ω_r) regardé comme élément du groupe $\Gamma(X)$ défini en 5.8 (avec $x_r = \text{ch}_r(D)$). En utilisant la loi d'anneau commutatif de $\Gamma(X)$, on voit que $P_i(x_1, \dots, x_n) = d\omega_i$ où ω_i est une forme différentielle explicite bien définie modulo $B^*(X)$ et $F^i\Omega^*(X)$. On pose alors

$$\Phi(d(E, D, \omega_1, \dots, \omega_n)) = d(E, D, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots)$$

avec des notations évidentes. D'après un argument d'homotopie analogue à celui décrit en 5.5, Φ est bien définie comme application de $MK^{P_n}(X)$ vers $MK^P(X)$.

L'application ψ_1 (qui n'est pas un homomorphisme de groupes) est obtenue par un processus algébrique analogue: il suffit de poser $x_r = d\omega_r$ (soit $\alpha_r = 0$) dans les formules. De manière plus précise, ψ_1 est l'identité sur les n premières composantes. Si $i > n$ et si on exprime P_j comme somme de monômes comme ci-dessus, la $i^{\text{ème}}$ composante de $\psi_1(\omega_1, \dots, \omega_n)$ sera la somme des monômes correspondants $\lambda_j \omega_{j_1 \wedge} \dots \wedge d\omega_{j_p}$.

B.2. EXEMPLE. Supposons que $n = 1$. On a alors

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_{1 \wedge} d\omega_1, \quad \omega_3 = \frac{1}{6} \omega_{1 \wedge} d\omega_{1 \wedge} d\omega_1, \text{ etc } \dots$$

On verra dans un article suivant celui-ci comment l'invariant de Godbillon–Vey des feuilletages de codimension 1 rentre naturellement dans ce cadre.

B.3. Plus généralement, considérons une série quelconque $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_s + \dots$ où $Q_s = Q_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un polynôme isobare de poids s (x_i étant de poids i). Il existe alors un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} [X, G_n] & \rightarrow & \bigoplus_{s=1}^n H^{2s-1}(\Omega^*(X)/F^s) & \rightarrow & MK^{P_n}(X) & \rightarrow & [X, BG_n] \rightarrow \bigoplus_{s=1}^n H^{2s}(\Omega^*(X)/F^s) \\ \parallel & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \Phi & & \parallel \\ [X, G_n] & \rightarrow & \bigoplus_{s=1}^{\infty} H^{2s-1}(\Omega^*(X)/F^s) & \rightarrow & MK^Q(X) & \rightarrow & [X, BG_n] \rightarrow \bigoplus_{s=1}^{\infty} H^{2s}(\Omega^*(X)/F^s) \end{array}$$

(noter l'absence d'une dernière flèche verticale). Pour le construire, on procède comme en B.1: la série Q peut s'écrire comme somme de monômes $\lambda_j x_{j_1} \dots x_{j_p}$ et il faut remplacer chaque x_r par le couple $(x_r, \omega_r) \in \Gamma(X)$ avec $x_r = \text{ch}_r(D)$, $r \leq n$. Il vient alors $Q_s(\text{ch } D) = d\tilde{\omega}_s$ où $\tilde{\omega}_s$ est une forme différentielle de degré $2s - 1$, définie de manière explicite modulo les formes exactes et le sous-complexe F^s et on pose

$$\Phi(d(E, D, \omega)) = d(E, D, \tilde{\omega})$$

Appendice C. Classes caractéristiques primaires et secondaires de fibrés multiplicatifs

C.1. Dans cet appendice nous nous plaçons pour fixer les idées dans le cadre de la K -théorie multiplicative stable (P étant le caractère de Chern total). Si (E, D, ω) est un fibré multiplicatif, $\text{ch}_r(D) - d\omega_r$ est une forme fermée de degré $2r$ appartenant au sous-complexe F^r . Avec ces notations, on a le théorème suivant:

C.2. THEOREME. La correspondance $(E, D, \omega) \mapsto \text{ch}_r(D) - d\omega_r$ induit un homomorphisme de $MK(X)$ vers $H^{2r}(F^r)$ tel que diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} K_1^{\text{top}}(X) & \longrightarrow & \bigoplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \longrightarrow & MK(X) & \longrightarrow & K^{\text{top}}(X) \longrightarrow \bigoplus H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus H^{2r-1}(X) & \longrightarrow & \bigoplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \bigoplus H^{2r}(F^r) & \longrightarrow & \bigoplus H^{2r}(X) \longrightarrow \bigoplus H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r). \end{array}$$

Démonstration. Si deux fibrés multiplicatifs (E^0, D^0, ω^0) et (E^1, D^1, ω^1) sont isomorphes, ils sont homotopes (5.5). Par conséquent, les deux formes différentielles $\text{ch}_r D^0 - d\omega_r^0$ et $\text{ch}_r D^1 - d\omega_r^1$ sont homotopes et par suite cohomologues (ceci n'est qu'une variante du lemme de Poincaré). Il s'en suit immédiatement que l'homomorphisme $MK(X) \rightarrow \bigoplus H^{2r}(F^r)$ est bien défini.

La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} MK(X) & \longrightarrow & K^{\text{top}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus H^{2r}(F^r) & \longrightarrow & \bigoplus H^{2r}(X) \end{array}$$

est claire.

Par ailleurs, si $\omega \in \Omega^{2r-1}(X)/F^r$ telle que $d\omega \in F^r$, l'élément de K -théorie multiplicative associé est $(T, d, \omega) - (T, d, 0)$ où T est le fibré trivial et d la connexion triviale. D'après la définition de l'opérateur bord en cohomologie, il en résulte immédiatement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \longrightarrow & MK(X) \\ \parallel & & \downarrow \\ \bigoplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) & \longrightarrow & \bigoplus H^{2r}(F^r) \end{array}$$

est commutatif également.

C.3. Les éléments de $\bigoplus H^{2r}(F^r)$ associés aux fibrés multiplicatifs sont appelés *classes primaires*. On obtient des *classes secondaires* pour des éléments de classe nulle dans $K^{\text{top}}(X)$. Ces classes appartiennent au groupe quotient

$$\bigoplus H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) / \text{Im}(K_1^{\text{top}}(X)).$$

References

1. Atiyah, M-F. et Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces, *Proc. Sympos. Pure Math.* 3, Amer. Math. Soc. (1961), pp. 7-38.
2. Atiyah, M-F., Hitchin, N., et Singer, I.: Self-duality in four dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 362 (1978), 425-461.
3. Beilinson, A-A.: Higher regulators and values of L -functions of curves, *Funct. Anal. Appl.* 14 (1980), 116-117.
4. Borel, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 7 (1974), 253-272.
5. Borel, A. et Serre, J-P.: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck), *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), 97-136.
6. Bott, R.: Lectures on characteristic classes and foliations, *Lecture Notes in Math.* 279 (1972), 1-94.
7. Bott, R., Shulman, H., et Stasheff, J.: On the De Rham theory of certain classifying spaces, *Adv. in Math.* 20 (1976), 43-56.
8. Cartan, H.: Théories cohomologiques, *Invent. Math.* 35 (1976), 261-271.
9. Connes, A.: Non commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES* No. 62, (1985), 257-360.
10. Connes, A. et Karoubi, M.: Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, *K-Theory* 2 (1988), 431-463.

11. Deligne, P.: Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES* No. 40 (1971), 5–58.
12. Dupont, J-L.: Simplicial De Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles. *Topology* **15** (1976), 233–245.
13. Dupont, J-L.: Curvature and characteristic classes, *Lecture Notes in Math.* **640** (1978).
14. Godbillon, C. et Vey, J.: Un invariant des feuilletages de codimension un, *C.R. Acad. Sci. Paris* **273** (1971), 92–95.
15. Grothendieck, A.: Théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), 137–154.
16. Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* No. 16 (1955).
17. Kamber, F-W. et Tondeur, P.: Characteristic invariants of foliated bundles, *Manuscripta Math.* **11** (1974), 48–69.
18. Karoubi, M.: *K-Theory, An Introduction*, Grundlehren Math. Wiss, 226, Springer-Verlag (1978).
19. Karoubi, M.: Homologie cyclique et K -théorie, *Astérisque* No. 149 (1987).
20. Karoubi, M.: Formule de Künneth en homologie cyclique, *C.R. Acad. Sci. Paris* **303** (1986), 527 et 595.
21. Karoubi M. et Leruste, C.: *Algebraic Topology via Differential Geometry*, Cambridge University Press (1988).
22. Milnor, J.: Introduction to algebraic K -theory, *Ann. of Math. Stud.* **72**, Princeton University Press (1971).
23. Milnor J. and Stasheff, J.: Lectures on characteristic classes, *Ann. of Math. Studies* **72**, Princeton University Press (1971).
24. Serre, J-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier* No. 6, (1955), 1–42.
25. Steenrod, N.: *Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press (1965).