

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Matrices de Jacobi, Périodicité de Bott et C*-algèbres.* Note (*) de M. **MAX KAROUBI** (1), transmise par M. Henri Cartan.

Cette Note complète deux Notes antérieures [(7), (8)], dont elle conserve la terminologie. On y définit un isomorphisme explicite de $K^n(X; \mathcal{E})$ sur $K^{n-1}(X; \check{\mathcal{C}})$ pour X compact. Ceci fournit une nouvelle démonstration des résultats de (7) et (8) et, *simultanément*, des théorèmes de périodicité de Bott (dans le cas classique). A l'aide de (8), les résultats énoncés ici peuvent se généraliser sans peine aux C^* -algèbres quelconques. Les espaces d'endomorphismes considérés seront toujours supposés munis de la topologie de la norme.

1. MATRICES DE JACOBI. — Soit $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ une suite infinie d'espaces de Hilbert de dimension finie ou infinie et soit

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n \oplus \dots$$

Un endomorphisme de H est dit « *de Jacobi* » (12) s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H en somme hilbertienne, par une matrice infinie (a_{ji}) , $a_{ji} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(H_i, H_j)$, du type suivant : les seuls éléments éventuellement non nuls sont $a_i = a_{ii}$, $b_i = a_{i, i+1}$, $c_i = a_{i+1, i}$. On désignera une telle matrice par la notation abrégée $M(a_i, b_i, c_i)$ en sous-entendant la décomposition. La « *matrice de Jacobi* » $M = M(a_i, b_i, c_i)$ est dite *quasi involutive* si $(a_i)^2 + c_{i-1}b_{i-1} + b_i c_i = 1$ pour $i > 1$, $a_i b_i + b_i a_{i+1} = 0$, $c_i a_i + a_{i+1} c_i = 0$, $b_i b_{i+1} = 0$ et $c_{i+1} c_i = 0$. Ces relations équivalent au fait que M^2 est encore une matrice de Jacobi $M(a'_i, b'_i, c'_i)$, avec $b'_i = 0$, $c'_i = 0$ et $a'_i = 1$, sauf peut-être pour $i = 1$. En particulier, si a_1, b_1 et c_1 sont complètement continus, ceci implique que l'endomorphisme M est inversible modulo les opérateurs complètement continus.

2. L'ISOMORPHISME $S : K^{p,q}(X; \mathcal{E}) \rightarrow K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{C}})$. — On désigne ici par \mathcal{E} ou $\mathcal{L}(k)$, $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , la catégorie des k -espaces vectoriels de dimension finie, ceux-ci étant supposés munis d'une forme sesquilinéaire non dégénérée. Si X est un espace paracompact, un triple (E, ε, γ) , définissant un élément de $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$, est dit *unitaire* si l'action de $C^{p,q}$ sur E est compatible avec la métrique et si les deux graduations ε et γ sont unitaires. En raison d'arguments classiques, on ne change pas le groupe $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$ en se restreignant aux triples unitaires. D'autre part, on peut évidemment regarder le couple $E' = (E, -\varepsilon)$ comme un $C^{p,q+1}$ -module. On désignera par \bar{E}' le $C^{p,q+1}$ -module obtenu à partir de E' en faisant opérer $C^{p,q+1}$ via son involution canonique. Soient λ_n (resp. μ_n) les coefficients de Fourier de la fonction

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} (\cos \theta + |\cos \theta|) \quad \left[\text{resp. } g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} (\cos \theta - |\cos \theta|) \right].$$

Si $\zeta = \varepsilon\eta$, on pose alors

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \zeta^n, \quad g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \zeta^n$$

[les séries convergent absolument car λ_n et μ_n sont $O(1/n^2)$]. Dans l'espace de Hilbert, $F = E' \oplus \bar{E}' \oplus E' \oplus \dots$, considérons l'endomorphisme de Jacobi,

$$M = M(a_i, b_i, c_i), \quad \text{où } a_i = (-1)^{i+1} \frac{\varepsilon(\zeta - \zeta^{-1})}{2},$$

$$b_i = c_i = g(\zeta) \quad \text{pour } i \text{ pair}, \quad b_i = c_i = f(\zeta) \quad \text{pour } i \text{ impair}.$$

On vérifie alors aisément que M est une quasi involution qui anticommute aux générateurs de $C^{p,q+1}$. Par suite, $\check{M} = J(\varepsilon, \eta)$ est une graduation de \check{F} dans la catégorie $\check{\mathcal{C}}$. L'application $(E, \varepsilon, \eta) \rightarrow (\check{F}, J(\varepsilon, \varepsilon), J(\varepsilon, \eta))$ induit donc un homomorphisme S de $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$ dans $K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{C}})$. Si Y est un sous-espace fermé de X , on définit par les mêmes formules un homomorphisme de $K^{p,q}(X, Y; \mathcal{E})$ dans $K^{p,q+1}(X, Y; \check{\mathcal{C}})$.

THÉORÈME (1). — *Supposons X compact. L'homomorphisme S est alors inverse à gauche de l'homomorphisme*

$$(2) \quad k^{-1} \cdot \partial^{p,q+1} : K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{C}}) \rightarrow K^{p,q}(X; \mathcal{E})$$

défini dans (7). En particulier S est un isomorphisme.

La démonstration de la première partie du théorème 2 nécessite le calcul spectral des opérateurs unitaires; elle s'étend de manière immédiate au cas relatif. Bien entendu, puisque la catégorie des fibrés hilbertiens est flasque (8), $k^{-1} \cdot \partial^{p,q+1}$ est un isomorphisme, ce qui implique que S l'est aussi. On peut aussi procéder de la manière suivante [sans faire appel au théorème 2.2.2 de (6)]. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{p,q+1}(X; \mathcal{E}) & \xrightarrow{S} & K^{p,q+2}(X; \check{\mathcal{C}}) \\ \downarrow t & \swarrow \approx^{k^{-1} \cdot \partial} & \downarrow T \\ K^{p,q}(X \times D^1, X \times S^0; \mathcal{E}) & \xrightarrow{S_1} & K^{p,q+1}(X \times D^1, X \times S^0; \check{\mathcal{C}}) \end{array}$$

où les homomorphismes t et T sont ceux du théorème 2.2.2 de (6) pour les catégories de Banach \mathcal{E} et $\check{\mathcal{C}}$ et où $\partial \cdot T = \partial^{p,q+1}$ [cf. (6), § 2.3]. Il résulte alors de la première partie du théorème que $t' = -k^{-1} \cdot \partial \cdot S_1$ est inverse à droite de t . En utilisant les structures multiplicatives en K -théorie, on en déduit formellement que $t' \cdot t = 1$ et que, toutes les flèches du diagramme sont des isomorphismes [cf. (5), § 1 pour ce formalisme ainsi que le paragraphe 4 de cette Note]. On obtient ainsi une autre démonstration

des résultats de (7) et des théorèmes de périodicité de Bott classiques [cf. (6), § 2.3 pour la traduction].

Désignons par \mathcal{K}_c la catégorie $\mathcal{L}(\mathcal{K}^+)$ où \mathcal{K}^+ est l'algèbre \mathcal{K} des opérateurs complètement continus augmentée d'un élément unité. L'homomorphisme S se factorise alors en la suite

$$K^{p,q}(X; \mathcal{E}) \xrightarrow{l} \tilde{K}^{p,q}(X; \mathcal{K}_c) \xrightarrow{S'} K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{K}}).$$

Pour X compact, l et S' sont des isomorphismes. Pour X paracompact, seul S' est un isomorphisme en général. On peut en déduire une autre démonstration du théorème 2 de (9) pour l'algèbre de Banach $A = \text{End } H/\mathcal{K}$ (sans utiliser le théorème de Kuiper).

3. INTERPRÉTATION DE S SUR LES ESPACES CLASSIFIANTS. — Par « fonctorialité », les considérations précédentes sur les groupes $K^{p,q}$ se reflètent sur les espaces classifiants $\widetilde{\text{Grad}}^{p,q}$ ou $\mathcal{F}^{p,q}$ [cf. (9), (11)]. Grâce aux algèbres de Clifford, on obtient ainsi des équivalences d'homotopie *explicites* $\mathbf{Z} \times B_0 \rightarrow \mathcal{F}^{0,0}$, $O \rightarrow \mathcal{F}^{0,1}$, $O/U \rightarrow \mathcal{F}^{0,2}$, $U/\text{Sp} \rightarrow \mathcal{F}^{0,3}$, etc. (dans le cas complexe il n'y a que deux applications). Décrivons par exemple l'application $O \rightarrow \mathcal{F}^{0,1}$. Pour cela, il est commode de considérer le groupe orthogonal infini $o = \varinjlim O(n)$ comme plongé (avec une topologie plus forte) dans $O_c(H)$ qui est le groupe des automorphismes unitaires de H de la forme $1 + k$, k complètement continu. On est ainsi ramené à décrire une application continue

$$(3) \quad S' : O_c(H) \rightarrow \mathcal{F}^{0,1}(H') \approx \mathcal{F}^{0,1}$$

où $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \dots$. On pose alors

$$S'(\alpha) = M(a_i, b_i, c_i), \quad \text{où } a_i = (-1)^{i+1} \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2},$$

$$b_i = -c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \alpha^n \quad \text{pour } i \text{ pair}, \quad b_i = -c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \alpha^n \quad \text{pour } i \text{ impair}.$$

4. EXTENSION AUX C^* -ALGÈBRES. — Soit A une C^* -algèbre réelle ou complexe plongée dans la C^* -algèbre $\text{End}_{\mathcal{K}}(H)$. Si on pose $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \dots$, un endomorphisme de H' sera dit « A -permutant » s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H' , par une matrice infinie (a_{ji}) , où $a_{ji} \in A$ et où, dans chaque ligne et chaque colonne, il y a au plus un élément non nul. Par définition, le « cône » CA de A est la plus petite C^* -algèbre contenue dans $\text{End}_{\mathcal{K}}(H')$ et contenant les endomorphismes A -permutants. Soit \mathcal{J} le plus petit idéal fermé de CA contenant les matrices permutantes (a_{ji}) telles que $a_{ji} = 0$, sauf pour un nombre fini de couples (i, j) . Par définition, la « suspension » SA de A est la C^* -algèbre quotient CA/\mathcal{J} (4). Les méthodes précédentes s'appliquent alors trivialement dans ce contexte [remplacer \mathcal{E} par $\mathcal{L}(A)$, \mathcal{K} par $\mathcal{L}(CA)$, $\check{\mathcal{K}}$ par $\mathcal{L}(SA)$]. Pour X compact, on obtient

en particulier un isomorphisme S de $K^{p,q}(X; A)$ sur $K^{p,q+1}(X; SA)$ qui s'exprime à l'aide de matrices de Jacobi. Ceci implique évidemment que $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} \pi_i(\text{GL}(A, n)) \approx \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} \pi_{i+1}(\text{GL}(SA, n))$, ce qui justifie la terminologie [cf. (6), prop. 2.3.8]. Les foncteurs $K^n(X, Y; SA)$ forment également une théorie de la cohomologie (X paracompact, Y fermé dans X).

(*) Séance du 24 mars 1969.

(1) L'auteur bénéficie de l'aide de la « National Science Foundation » (Grant GP-7952 X).

(2) Il se produit ici une légère confusion de notation (qui est inévitable) entre le corps k et l'homomorphisme k défini dans (7).

(3) Rappelons [cf. (9), (11)] que $\mathcal{F}^{0,1}(H') \approx \mathcal{F}^{0,1}$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm symétriques gauches dans H' .

(4) Il existe bien des façons de définir une suspension « raisonnable » d'une algèbre de Banach [cf. (8), (10)]. Celle-ci semble la mieux adaptée aux C^* -algèbres.

(5) M. F. ATIYAH, *Quart. J. Math.*, Oxford, 1968.

(6) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 1, 1968, p. 161-270.

(7) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 305.

(8) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 328 et 345.

(9) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 268, série A, 1969, p. 596.

(10) M. KAROUBI, *Séminaire sur la K-théorie* (à paraître).

(11) M. KAROUBI, *Espaces classifiants en K-théorie* (à paraître).

(12) M. H. STONE, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, XV, 1932.

(Institut de Mathématique de Strasbourg;
The Institute for Advanced Study,
Princeton,
N. J. 08540, U. S. A.)