TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 147, January 1970

ESPACES CLASSIFIANTS EN K-THÉORIE

PAR
MAX KAROUBI[1]

Cet article trouve son origine dans une conjecture d'Atiyah et Singer (non publiée) exprimant les espaces classifiants des foncteurs $K^n(X), n=0, 1, 2, \ldots$ à l'aide d'opérateurs de Fredholm convenables (cf. le §1 pour un énoncé précis). Ceci généralise le théorème de Jänich-Atiyah pour $n=0$ [3], [8]. En nous appuyant sur les techniques de [12] et [18] nous démontrons ici cette generalisation. Cet article est donc la suite naturelle de [13], [15] où en est prouvée une version stable. En fait, nous proposons ici deux démonstrations de la conjecture. La première qui s'appuie essentiellement sur les résultats de [12] et [13], est décrite dans le §3. La seconde, esquissée dans le §4 et en appendice consiste à chercher une application simple entre les espaces classifiants ordinaires et ceux d'Atiyah-Singer qui veuille bien être une équivalence d'homotopie. Cette application, qui s'exprime à l'aide de "matrices de Jacobi" [25], permet de démontrer simultanément la conjecture et les théorèmes de périodicité de Bott classiques.

Nous avons aussi profité de l'occasion pour développer de manière systématique la K-théorie des espaces paracompacts. Dans l'ensemble, ces résultats ne sont pas nouveaux (cf. par exemple [7]) et font partie de ce qu'il est convenu d'appeler la "K-théorie représentable". L'avantage du point de vue adopté ici est qu'il fournit, grâce aux "catégories de Banach", un cadre commun aux K-théories "classique" et "représentable".

L'essentiel de cet article se trouve évidemment contenu dans les §§3 et 4, les deux premiers paragraphes étant simplement une préparation à ceux-ci. La conjecture d'Atiyah-Singer et ses implications immédiates sont décrites dans le §1. Dans le §2 nous avons d'une part transposé au cadre paracompact les techniques de [12] et d'autre part explicité les espaces classifiants associés naturellement à une algèbre de Banach. On obtient ainsi un cadre unifié pour les espaces classifiants ordinaires et ceux d'Atiyah-Singer.

Les résultats essentiels contenus dans cet article ont été résumés dans deux Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences.

Enfin, une dernière remarque: bien que nous nous soyions efforcé d'être complet dans les définitions et les démonstrations, nous n'avons pu résister à la tentation d'utiliser les catégories de Banach de [12][2]. Nous laissons au lecteur le soin de se

Received by the editors March 25, 1969 and, in revised form, April 25, 1969.

(1) L'auteur bénéficie de l'aide de la "National Science Foundation" (Grant GP-7952X).

(2) Ou, ce qui revient au même ici, les algèbres de Banach (cf. [12] Proposition 1.3.4).

convaincre de l'utilité de cette notion pour démontrer simplement les théorèmes proposés ici.

Note ajoutée à la correction des épreuves. Je viens d'apprendre que la conjecture a été résolue (par une méthode complètement différente semble-t-il) par Atiyah et Singer. Pour éviter toute ambiguïté, précisons que l'essentiel de cet article (à l'exception de §4) a été communiqué à Atiyah (lettre du 4 aóut 1967) en réponse à une question qu'il m'avait posée. Précisons aussi que ce travail est la conclusion d'articles déjà parus ([13], [14], [15], [16]).

I. **La conjecture d'Atiyah-Singer.** Soit k le corps de nombres réels ou des nombres complexes et soit $C^{p,q+2}$ l'algèbre de Clifford de k^{p+q+2} muni de la forme quadratique $-x_1^2-\cdots-x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q+2}^2$ (cf. [12, §1.1] pour les détails). Cette algèbre s'écrit $F(n)$ ou $F(n)\oplus F(n)$, F étant l'un des trois corps $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ ou $\boldsymbol{H}$ ($F(n)$ représentant l'algèbre des matrices $n\times n$ à coefficients dans F). Soit H un espace de Hilbert (sur le corps k) où l'algèbre de Clifford opère. Si $e_1,\ldots,e_p,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{q+2}$ sont les générateurs de $C^{p,q+2}$, ceux-ci peuvent être interprétés comme des automorphismes de H satisfaisant aux relations

$$(e_i)^2 = -1,\quad i=1,\ldots,p,\qquad (\varepsilon_j)^2 = +1,\quad j=1,\ldots,q+2,$$

et anticommutant deux à deux. Réciproquement, la donnée de tels automorphismes est bien sûr équivalente à celle d'une structure de $C^{p,q+2}$-module sur H. Soit maintenant $G^{p,q+2}$ le sous-groupe fini de $(C^{p,q+2})^*$ engendré multiplicativement par les e_i et les ε_j. Il existe alors une métrique de H invariante par l'action de $G^{p,q+2}$. Pour cette métrique on a $e_i^*=-e_i$ et $\varepsilon_j^*=\varepsilon_j$. D'autre part, d'après les théorèmes généraux sur les algèbres semi-simples, l'espace de Hilbert H peut s'écrire sous la forme H'^n ou $H'^n\oplus H''^n$ suivant que $C^{p,q+2}$ est une algèbre simple ou non. Dans ce dernier cas H'^n (resp. H''^n) est un module sur le premier (resp. le second) facteur $F(n)$ de la somme $F(n)\oplus F(n)\approx C^{p,q+2}$.

DEFINITION (1.1). *Le $C^{p,q+2}$-module H est dit "infini" si la métrique de H est invariante par l'action de $G^{p,q+2}$ et si H'^n et H''^n (éventuellement) sont des espaces vectoriels de dimension infinie.*

REMARQUE. Deux $C^{p,q+2}$-modules infinis sont bien entendu isométriques. Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que H s'écrit $C^{p,q+2}\otimes H'$ où H' est un espace de Hilbert (ordinaire) de dimension infinie. On en déduit aussi que H peut-être muni d'une structure de $C^{p',q'}$-module infini ($p'\geqq p$, $q'\geqq q+2$) donnant par restriction des scalaires la structure de $C^{p,q+2}$-module initiale.

A un tel espace de Hilbert H, nous allons associer l'ensemble $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ des opérateurs de Fredholm [3] (bornés) dans H vérifiant les relations suivantes:

$$\begin{aligned} D^* &= D \\ De_i &= -e_iD, \qquad i=1,\ldots,p \\ D\varepsilon_j &= -\varepsilon_jD, \qquad j=1,\ldots,q+1 \end{aligned}$$

(noter qu'aucune relation algébrique n'est imposée entre D et ε_{q+2}). Si on munit $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ de la topologie de la norme induite par End H, on peut considérer la composante connexe $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H)=\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$ de ε_{q+2} dans $\mathscr{F}^{p,q}(H)$. Soit $k^{p,q}$ le groupe discret K^{p-q}(Point). Nous démontrerons dans le §3 le théorème suivant:

THEOREME (1.2) (CONJECTURE D'ATIYAH-SINGER[3]). *L'espace* $k^{p,q}\times\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$ *est un espace classifiant pour le foncteur* $K^{p-q}(X)$.

REMARQUE 1. Le théorème vaut aussi bien dans le cas réel que dans le cas complexe (H étant alors un espace de Hilbert réel ou complexe suivant le cas). $K^n(X)$ désigne de même indifféremment la K-théorie réelle ou complexe. Lorsqu'il y a risque de confusion, nous noterons $KU^n(X)$ (resp. $KO^n(X)$) les groupes K^n de la K-théorie complexe (resp. réelle). Ce type de convention est valable pour tout cet article.

REMARQUE 2. On peut définir une structure d'espace de Hopf sur $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$ de la manière suivante: H étant infini il existe une isométrie f: $H\oplus H\to H$ de $C^{p,q+2}$-modules. Ceci permet de définir une application continue

$$\boxplus : \tilde{\mathscr{F}}^{p,q}\times\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}\to\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$$

par la formule $D\boxplus D'=f\cdot(D\oplus D')\cdot f^{-1}$. D'après le théorème de Kuiper [18], [6], appliqué au cas réel, complexe ou quaternionien[4], la classe d'isotopie de f, donc celle de $\boxplus$, est indépendante du choix particulier de f. On aura alors un isomorphisme de *groupes* $K^{p-q}(X)\approx[X, k^{p,q}\times\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}]$, pour la structure de groupe évidente sur le deuxième facteur.

REMARQUE 3. Il est faux que $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ soit un espace classifiant pour $K^{p-q}(X)$ en général (par exemple $\mathscr{F}^{1,0}(H)$ a trois composantes connexes; cf. Lemme 1.4). Cependant, on démontrera plus loin qu'il en est bien ainsi si $p-q\neq 1$ mod 4 dans le cas réel et si $p-q\neq 1$ mod 2 dans le cas complexe.

REMARQUE 4. Dans l'énoncé du Théorème 1.2, l'espace X est supposé compact pour éviter toute ambiguïté sur la définition de $K^{p-q}(X)$. Si X n'est pas compact, nous verrons dans les §§2 et 3 comment étendre la définition de $K^{p-q}(X)$ pour que le théorème reste vrai.

Pour appliquer le Théorème 1.2 avec différents choix du couple (p, q), il nous faut décrire de manière plus "concrète" les espaces $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ et $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$. Cette description n'est pas indispensable pour la démonstration du Théorème 1.2 et le lecteur peut sans inconvénient omettre la fin de ce paragraphe. Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces de Hilbert envisagés sont de dimension infinie.

D'après les considérations générales de [12, §2.1], il est clair que les espaces $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}=\tilde{\mathscr{F}}^{n}$ ne dépendent, au type d'homéomorphisme près, que de la différence

---

(3) Nous modifions légèrement son énoncé pour l'adapter aux notations de [12].

(4) Nous utilisons ici de manière implicite le fait que la catégorie des $F(n)$-modules est équivalente à celle des F-modules.

$n=p-q$ mod 8 (mod 2 dans le cas complexe). Pour avoir une liste exhaustive des espaces $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}$, 8 cas particuliers sont donc à considérer (2 seulement dans le cas complexe). Notons aussi que deux $C^{p,q+2}$ espaces de Hilbert infinis étant isométriques, on a une grande latitude dans le choix des automorphismes e_i et ε_j.

Cas $p=q=0$. L'algèbre $C^{0,2}$ est alors simple et on peut choisir $H=H'\oplus H'$,

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Un élément D de $\mathscr{F}^{0,0}(H)$ s'écrit donc

$$D=\begin{pmatrix}0 & D'\\ D'^* & 0\end{pmatrix},$$

où D' est un opérateur de Fredholm dans H'. Si on note $\mathscr{F}(H')$ l'ensemble de tels opérateurs, $\mathscr{F}^{0,0}(H)$ s'identifie ainsi à $\mathscr{F}(H')$ et $\tilde{\mathscr{F}}^{0,0}$ au sous-ensemble de $\mathscr{F}(H')$ formé d'opérateurs à indice zéro. Puisque les composantes connexes de $\mathscr{F}(H')$ sont homéomorphes, on a $k^{0,0}\times\tilde{\mathscr{F}}^{0,0}\approx\mathscr{F}(H')$. Le Théorème 1.2 implique donc le résultat bien connu suivant(5):

PROPOSITION (1.3) (ATIYAH-JÄNICH). *Un espace classifiant pour le groupe* $K(X)\approx K^0(X)$ *est l'ensemble* $\mathscr{F}^0$ *des opérateurs de Fredholm dans l'espace de Hilbert* H'.

Cas $p-1=q=0$. L'algèbre $C^{1,2}\approx C^{0,1}(2)$ n'est plus simple, mais on peut encore choisir $H=H'\oplus H'$,

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad e_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix},$$

où $\alpha\colon H'\to H'$ est un endomorphisme de H' auto-adjoint, de carré un, tel que $\operatorname{Ker}(1-\alpha)$ et $\operatorname{Ker}(1+\alpha)$ soient de dimension infinie. Un calcul simple sur les matrices 2×2 montre que $\mathscr{F}^{1,0}(H)$ est formé d'endomorphismes de $H=H'\oplus H'$ qui s'écrivent sous la forme

$$D=\begin{pmatrix}0 & D'\\ D' & 0\end{pmatrix},$$

où D' est un opérateur de Fredholm auto-adjoint. Notons ϕ l'ensemble de tels opérateurs D' et $D^{\vee\prime}$ l'image de D' dans l'algèbre de Banach $A=\operatorname{End} H'/\mathscr{K}$, où $\mathscr{K}$ est l'idéal bilatère des opérateurs complètement continus dans H'(6).

LEMME (1.4). *L'ensemble* ϕ *a trois composantes connexes* ϕ^+, ϕ^- *et* $\mathscr{F}^1$; ϕ^+ (*resp.* ϕ^-) *est l'ensemble des opérateurs de Fredholm* D' *tels que le spectre de* $D^{\vee\prime}$ *soit contenu dans* $\boldsymbol{R}^+$ (*resp.* $\boldsymbol{R}^-$) *et* $\mathscr{F}^1=\phi-\phi^+-\phi^-$.

(5) En fait on utilisera ce résultat dans le courant de la démonstration du Théorème 1.2.
(6) C'est à dire limites d'opérateurs de rang fini.

Démonstration. En raisonnant comme dans [3] ou [15], on voit aisément que ϕ a le même type d'homotopie que $\phi^{\vee}$, $\phi^{\vee}$ désignant l'ensemble des éléments inversibles Δ de l'algèbre A tels que $\Delta^* = \Delta$. Soit maintenant $\phi^{\Diamond}$ le sous-ensemble de ϕ formé des éléments Δ de A qui satisfont à la condition supplémentaire $\Delta^2 = 1$. Les théorèmes classiques sur le calcul holomorphe dans une algèbre de Banach (cf. [27, p. 384]) impliquent que $\phi^{\Diamond}$ est rétracte par déformation de $\phi^{\vee}$. En outre, $\phi^{\vee +}$, $\phi^{\vee -}$ et $\mathscr{F}^{\vee 1}$, images de ϕ^+, ϕ^- et $\mathscr{F}^1$ dans A et ayant le même type d'homotopie que ceux-ci, sont invariants par cette rétraction. Par conséquent $\phi^{\vee +}$ et $\phi^{\vee -}$ (donc ϕ^+ et ϕ^-) sont contractiles. Il reste à montrer que $\mathscr{F}^1$ est connexe. Considérons pour cela deux éléments Δ et Δ' de $\mathscr{F}^1$. Alors Δ (resp. Δ') est homotope dans $\mathscr{F}^1$ à $\Delta + \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}\,\Delta}$ (resp. à $\Delta' + \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}\,\Delta'}$). Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que Δ et Δ' sont inversibles. Dans ce cas, le calcul holomorphe dans l'algèbre End H permet aussi de supposer que $\Delta^2 = \Delta'^2 = 1$. Posons $K_1 = \mathrm{Ker}\,(\Delta - 1)$, $K_2 = \mathrm{Ker}\,(\Delta + 1)$, $K_1' = \mathrm{Ker}\,(\Delta' - 1)$, $K_2' = \mathrm{Ker}\,(\Delta' + 1)$. Puisque Δ et Δ' appartiennent à $\mathscr{F}^1$, les espaces vectoriels K_1, K_2, K_1' et K_2' sont de dimension infinie et on peut trouver une isométrie $\phi\colon H' = K_1 \oplus K_2 \to K_1' \oplus K_2' = H'$ telle que $\Delta' = \phi^{-1} \cdot \Delta \cdot \phi$. L'isométrie ϕ étant isotope à l'identité d'après le théorème de Kuiper [6], [18], on en déduit que Δ' est homotope à Δ dans $\mathscr{F}^1$. D'où la proposition:

PROPOSITION (1.5). *Un espace classifiant pour le foncteur $K^1(X)$ est l'ensemble $\mathscr{F}^1$ des opérateurs de Fredholm auto-adjoints D tels que l'axe imaginaire partage le spectre de $D^{\vee}$ en deux parties non vides.*

La description de $\tilde{\mathscr{F}}^{0,0}$ et de $\tilde{\mathscr{F}}^{1,0}$ étant suffisante dans le cas complexe, nous ne considèrerons que le cas réel dans ce qui suit.

Cas $p = q - 1 = 0$. On a $C^{0,3} \approx \boldsymbol{C}(2)$ et on peut choisir $H = H' \oplus H'$,

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

où α est un automorphisme de H' symétrique gauche ($\alpha^* = -\alpha$) tel que $\alpha^2 = -1$ (en d'autres termes α est une structure complexe de H' compatible avec la métrique). Un élément D de $\mathscr{F}^{0,1}(H)$ s'écrit donc sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -D' \\ D' & 0 \end{pmatrix},$$

où D' est de Fredholm et symétrique gauche. Notons $\mathscr{F}^{-1}$ l'ensemble de tels opérateurs.

LEMME (1.6). *L'espace $\mathscr{F}^{-1}$ est formé de deux composantes connexes isomorphes. Si $D' \in \mathscr{F}^{-1}$, la parité de la dimension du noyau de D' caractérise la composante connexe de D'.*

Démonstration. Désignons par $(\mathscr{F}^{-1})^+$ (resp. $(\mathscr{F}^{-1})^-$) le sous-ensemble de $\mathscr{F}^{-1}$ formé des opérateurs D tels que Ker D soit de dimension paire (resp. impaire).

En raisonnant comme dans le cas précédent et en remarquant qu'il existe toujours un opérateur symétrique gauche inversible dans un espace vectoriel de dimension paire, on voit que $(\mathscr{F}^{-1})^+$ et $(\mathscr{F}^{-1})^-$ sont connexes. Il reste à montrer qu'un point de $(\mathscr{F}^{-1})^+$ et un point de $(\mathscr{F}^{-1})^-$ ne peuvent être joints par un chemin dans $\mathscr{F}^{-1}$. Rappelons pour cela l'existence d'une bijection (cf. [13] ou [15]):

$$j\colon \bar{K}^{p,q}(X) \to K^{p,q}(X)$$

pour tout espace compact X. D'autre part, on a une surjection évidente (grâce au théorème de Kuiper)

$$[X, \mathscr{F}^{p,q}(H)] \to \bar{K}^{p,q}(X)$$

(cf. le §4 pour plus de détails). En particulier, si X est réduit à un point et si $p=q-1=0$, on en déduit une surjection

$$\pi_0(\mathscr{F}^{-1}) \to \boldsymbol{Z}_2.$$

Le résultat annoncé s'en déduit aussitôt.

Remarque. Pour démontrer que $\pi_0(\mathscr{F}^{-1})=\boldsymbol{Z}_2$, on aurait pu aussi considérer une famille d'opérateurs réels sur le cercle S^1. L'auteur ne connait pas de démonstration "élémentaire".

Corollaire (1.7). *Un espace classifiant pour le groupe $KO^{-1}(X)$ est l'ensemble $\mathscr{F}^{-1}=\mathscr{F}O^{-1}$ des opérateurs de Fredholm symétriques gauches dans un espace de Hilbert (réel) de dimension infinie.*

Cas $p-2=q=0$. On a $C^{2,2}\approx \boldsymbol{R}(4)$ et $C^{2,1}\approx C^{1,0}(2)\approx \boldsymbol{C}(2)$. On peut donc écrire $H=H'\oplus H'$, H' étant un espace de Hilbert complexe, avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

où c est la conjugaison complexe. Par suite, un élément D de $\mathscr{F}^{2,0}(H)$ s'écrit sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D' \\ D' & 0 \end{pmatrix},$$

où $D'\colon H' \to H'$ est un opérateur de Fredholm antilinéaire et auto-adjoint (pour la métrique réelle sous-jacente).

Lemme (1.8). *L'espace $\mathscr{F}^{2,0}(H)$ est connexe.*

Démonstration. Si $D'\colon H' \to H'$ est un opérateur de Fredholm antilinéaire et auto-adjoint, Ker D' est un sous-espace vectoriel (complexe) de H' de dimension finie. En outre, H' se scinde en la somme Ker $D' \oplus (\text{Ker } D')^{\perp}$ de sous-espaces invariants par l'action de D'. En utilisant le fait qu'on peut trouver un tel opérateur D' sur un espace vectoriel complexe quelconque, on voit qu'on peut supposer D' injectif (donc bijectif). D'après le calcul holomorphe dans $\text{End}_{\mathbf{R}}\, H'$, on se ramène par homotopie au cas $D'^2=1$. On peut alors scinder H' en la somme $H''\oplus H''$ de sous-espaces vectoriels réels avec

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si c est la conjugaison complexe, on peut de même scinder H' en la somme $H_1''\oplus H_1''$ relativement à c et trouver une isométrie (complexe)

$$\phi\colon H' = H''\oplus H'' \to H_1''\oplus H_1'' = H'$$

telle que $D'=\phi^{-1}\cdot c\cdot\phi$. L'isométrie ϕ étant homotope à l'identité, D' et c sont homotopes, d'où le résultat. La proposition suivante s'en déduit aussitôt:

Proposition (1.9). *Un espace classifiant pour le groupe $KO^2(X)$ est l'ensemble $\mathscr{F}O^2$ des opérateurs de Fredholm antilinéaires et auto-adjoints dans un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.*

Cas $p=q-2=0$. Puisque $C^{0,4}\approx \boldsymbol{H}(2)$, on peut écrire $H=H'\oplus H'$ où H' est un espace de Hilbert quaternionien et

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}.$$

Un élément D de $\mathscr{F}^{0,2}(H)$ s'écrit donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -D' \\ D' & 0 \end{pmatrix},$$

où D' est antilinéaire (pour la $\boldsymbol{C}$-structure de H') et symétrique gauche (pour la métrique réelle sous-jacente).

Lemme (1.10). *L'espace $\mathscr{F}^{0,2}(H)$ a deux composantes connexes isomorphes. Si $D\in\mathscr{F}^{0,2}(H)$, la parité de la dimension (complexe) de* Ker *D caractérise la composante connexe de D.*

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du Lemme 1.6.

Corollaire (1.11). *Un espace classifiant pour le groupe $KO^{-2}(X)$ est l'ensemble $\mathscr{F}O^{-2}$ des opérateurs de Fredholm antilinéaires symétriques gauches dans un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.*

Cas $p=q-4=0$. On a de manière générale $C^{p,q+4}\approx C^{p,q}\otimes C^{0,4}$. Puisque $C^{0,4}\approx\boldsymbol{H}(2)$, il résulte des arguments précédents que $\mathscr{F}^{0,4}(H)$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs de Fredholm quaternioniens sur un espace de Hilbert H' qui est muni d'une structure de module sur le corps des quaternions. On en déduit le résultat bien connu suivant:

Proposition (1.12). *Un espace classifiant pour le foncteur $KO^4(X)$ est l'ensemble des $\boldsymbol{H}$-opérateurs de Fredholm sur un espace de Hilbert quaternionien.*

Cas $p-5=q=0$ et $p-3=q=0$. Dans ces deux cas, on a les propositions suivantes:

PROPOSITION (1.13). *Un espace classifiant pour le foncteur* $KO^5(X)\approx KO^{-3}(X)$ *est l'ensemble des* $\mathbf{H}$*-opérateurs de Fredholm auto-adjoints* D *sur un espace de Hilbert quaternionien tels que l'axe imaginaire partage le spectre de* $D^{\vee}$ *en deux parties non vides.*

PROPOSITION (1.14). *Un espace classifiant pour* $KO^3(X)$ *est l'ensemble des* $\mathbf{H}$*-opérateurs de Fredholm symétriques gauches sur un espace de Hilbert quaternionien.*

La démonstration de ces deux propositions est analogue à celle de la Proposition 1.5 et du Corollaire 1.7.

Les divers cas particuliers ainsi envisagés dans ce paragraphe peuvent être rassemblés dans les deux théorèmes suivants:

THEOREME (1.15). *On a un isomorphisme naturel*

$$KU^n(X) \approx [X, \mathscr{F}U^n],$$

où $\mathscr{F}U^n$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathscr{F}(H)$ *formé des opérateurs* $\mathbf{C}$*-linéaires* D *satisfaisant à la condition suivante*:

$n\equiv 0 \bmod 2$: *aucune condition supplémentaire.*

$n\equiv 1 \bmod 2$: *D est auto-adjoint* ($D^*=D$) *et le spectre de* $D^{\vee}$ *n'est pas situé d'un seul côté de l'axe imaginaire.*

THEOREME (1.16). *On a un isomorphisme naturel*

$$KO^n(X) \approx [X, \mathscr{F}O^n],$$

où $\mathscr{F}O^n$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathscr{F}(H)$ *formé des opérateurs réels* D *satisfaisant à la condition suivante*:

$n\equiv 0 \bmod 8$: *aucune condition supplémentaire.*

$n\equiv 1 \bmod 8$: *D est auto-adjoint, le spectre de* $D^{\vee}$ *n'étant pas situé d'un seul côté de l'axe imaginaire.*

$n\equiv 2 \bmod 8$: *H est muni d'une structure complexe pour laquelle D est auto-adjoint et antilinéaire.*

$n\equiv 3 \bmod 8$: *H est muni d'une structure quaternionienne; D est symétrique gauche* ($D^*=-D$) *et est compatible avec cette structure.*

$n\equiv 4 \bmod 8$: *H est muni d'une structure quaternionienne et D est compatible avec cette structure.*

$n\equiv -3 \bmod 8$: *H est muni d'une structure quaternionienne; D est auto-adjoint et est compatible avec cette structure. En outre, le spectre de* $D^{\vee}$ *n'est pas situé d'un seul côté de l'axe imaginaire.*

$n\equiv -2 \bmod 8$: *H est muni d'une structure complexe; D est symétrique gauche et antilinéaire.*

$n\equiv -1 \bmod 8$: *D est symétrique gauche.*

Remarque. L'adjoint D^* d'un opérateur D s'entend au sens de la métrique de l'espace vectoriel réel sous-jacent. Dans le cas où l'espace de Hilbert H est complexe (resp. quaternionien), on écrira $H=H'\otimes \boldsymbol{C}\approx H'\oplus H'$ (resp. $H=H'\otimes \boldsymbol{H}\approx H'\oplus H'\oplus H'\oplus H'$), la métrique de H étant la somme des métriques de chaque exemplaire de H'.

II. **Rappels et complements de K-théorie.** Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de Banach dans le sens de [10](7) et soit X un espace *paracompact*. On veut définir la notion de "$\mathscr{C}$-fibré" sur X. Pour cela, on commence par considérer la catégorie $\mathscr{C}_T(X)$ des "$\mathscr{C}$-fibrés triviaux" sur X: cette catégorie a comme objets les objets de $\mathscr{C}$, les morphismes de source E et de but F étant simplement les applications continues de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E, F)$. La composition des morphismes est immédiate. La catégorie des $\mathscr{C}$-fibrés triviaux est évidemment additive et la catégorie pseudo-abélienne associée (cf. [11]) sera notée $\mathscr{C}(X)$: un objet de $\mathscr{C}(X)$ est donc un couple (E, p) où E est un $\mathscr{C}$-fibré trivial et p un projecteur de E (penser à "$\mathrm{Im}\, p$"). Un morphisme de source (E, p) et de but (F, q) est un morphisme $f: E\to F$ de $\mathscr{C}$-fibrés triviaux tel que $f\cdot p=f\cdot q=f$. On voit aisément qu'un $\mathscr{C}$-fibré (i.e. un objet de $\mathscr{C}(X)$) est "localement trivial" (cf. [12], Proposition 1.2.8).

Lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{C}(X)$ est équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels qui sont *facteurs directs de fibrés triviaux*; celle-ci coïncide avec la catégorie de tous les fibrés vectoriels si X est compact. Un autre cas particulier intéressant est celui où $\mathscr{C}$ est la catégorie $\mathscr{P}(A)$ des modules projectifs de type fini sur une algèbre de Banach A (lorsque $A=\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ ou $\boldsymbol{H}$, on retrouve le cas particulier précédent). Alors $\mathscr{C}(X)$ est équivalente à la catégorie des fibrés banachiques dont la fibré est un A-module projectif de type fini et s'exprimant comme facteur direct d'un fibré en A-modules trivial $X\times A^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Definition (2.1). *Soient X un espace paracompact et $\mathscr{C}$ une catégorie de Banach. Alors $K(X;\mathscr{C})$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie additive $\mathscr{C}(X)$. Si $\mathscr{C}=\mathscr{P}(A)$ on note simplement $K(X; A)$ le groupe $K(X;\mathscr{P}(A))$.*

Remarque. Avec les notations usuelles, on a donc (pour X compact) les identités $K(X;\boldsymbol{R})=KO(X)$, $K(X;\boldsymbol{C})=KU(X)$, $K(X;\boldsymbol{H})=K\,\mathrm{sp}\,(X)$.

Soit maintenant $C^{p,q}$ l'algèbre de Clifford de $\boldsymbol{R}^{p+q}$ muni de la forme quadratique de type (p, q). On définit un groupe $K^{p,q}(X;\mathscr{C})$ comme suit: soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des triples (E, η_1, η_2) où E est un $\mathscr{C}$-fibré muni d'une structure de $C^{p,q}$-module et où η_1 et η_2 sont deux "graduations" de E (i.e. des automorphismes involutifs qui anticommutent aux générateurs e_i, ε_j de l'algèbre $C^{p,q}$). Deux triples (E, η_1, η_2) et (F, ξ_1, ξ_2) sont *équivalents* s'il existe un $\mathscr{C}$-fibré en $C^{p,q}$-module G et une graduation

(7) En fait une catégorie "prébanachique" suffira pour nos considérations. Pour la commodité du lecteur, rappelons que ceci signifie que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ est, pour tout couple (M, N), muni d'une structure d'espace de Banach de telle sorte que la composition des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)\times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N, P)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, P)$ soit bilinéaire et continue.

ξ de G, telsque $\eta_1 \oplus \xi_2 \oplus \xi$ soit homotope à $\eta_2 \oplus \xi_1 \oplus \xi$ parmi les graduation de $E \oplus F \oplus G$. Le quotient de $\mathscr{T}$ par la relation d'équivalence ainsi définie est noté $K^{p,q}(X; \mathscr{C})$: c'est de manière évidente un groupe pour la somme des triples. Si $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$, on le note aussi $K^{p,q}(X; A)$.

D'après le Lemme 2.1.13 de [12], cette définition coïncide avec celle de [12] (dans le cas où X est compact). D'autre part, d'après les considérations générales de [12] (cf. par exemple la Proposition 2.1.18), on ne restreint pas la généralité en supposant que E est un fibré de la forme $C^{p,q+1} \otimes F$, où F est un $\mathscr{C}$-fibré trivial, la premiere graduation η_1 étant définie par le dernier générateur ε_{q+1} de $C^{p,q+1}$. La deuxième graduation η_2 s'interprète alors comme une application continue de X dans l'espace Grad (E) des "graduations" de E. Pour fixer les idées, supposons que $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$ et considérons $F = A^n$. On note alors $\mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)$ l'ensemble des "graduations" de $E = C^{p,q+1} \otimes F$, i.e. l'ensemble des A-endomorphismes Δ de ce A-module tels que $\Delta^2 = 1$, $\Delta e_i = -e_i \Delta$ et $\Delta \varepsilon_j = -\varepsilon_j \Delta$, $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$. Si $n = 1$, on note simplement $\mathrm{Grad}^{p,q}(A)$ l'ensemble $\mathrm{Grad}^{p,q}(1, A)$; on a évidemment $\mathrm{Grad}^{p,q}(n, A) = \mathrm{Grad}^{p,q}(A(n))$. D'autre part, on a des applications évidentes $\mathrm{Grad}^{p,q}(n, A) \to \mathrm{Grad}^{p,q}(n+1, A)$ définies par $\Delta \mapsto \Delta \oplus \varepsilon_{q+1}$. Enfin, on a un diagramme commutatif (pour tout espace X paracompact):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] {[X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)]} \arrow[rr] \arrow[dr, "f_n"'] & & {[X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n+1, A)]} \arrow[dl, "f_{n+1}"] \\ & K^{p,q}(X; A) & \end{tikzcd}$$

où f_n est défini par la formule $f_n(\Delta) = d(E, \varepsilon_{q+1}, \Delta)$. Avec les techniques de [12, §2.1], la proposition suivante est évidente:

PROPOSITION (2.2). *Les applications f_n induisent un isomorphisme de $K^{p,q}(X; A)$ sur* inj $\lim_n [X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)]$ *pour tout espace X paracompact.*

REMARQUE 1. Si X est compact, on a une identité d'un type bien connu

$$\operatorname*{inj\,lim}_n\, [X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)] \approx [X, \operatorname*{inj\,lim}_n \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)].$$

REMARQUE 2. Si $p = q = 0$, on retrouve évidemment le groupe $K(X; A)$ ordinaire (cf. [12], Proposition 2.1.7 par exemple).

REMARQUE 3. Pour définir $\mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)$, on est parti du $C^{p,q+1}$-A-module $N = C^{p,q+1} \otimes A$ et on a considéré les graduations de N^n (regardé comme $C^{p,q}$ module). Bien entendu, si on s'intéresse seulement à la limite inductive

$$\operatorname*{inj\,lim}_n\, [X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)],$$

on peut remplacer N par un $C^{p,q+1}$-A-module projectif de type fini M quelconque, à condition qu'il "engendre" la catégorie de tels modules. On veut dire par là que tout $C^{p,q+1}$-A-module projectif de type fini est facteur direct de M^n pour n assez grand. On peut alors identifier

$$\operatorname*{inj\,lim}_n\,[X, \mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)] \quad \text{et} \quad \operatorname*{inj\,lim}_n\,[X, \mathrm{Grad}^{p,q}(M^n)]$$

avec des notations évidentes.

Les définitions que nous venons de donner des groupes $K^{p,q}(X; \mathscr{C})$ et $K^{p,q}(X; A)$ s'étendent de manière immédiate au cas relatif. Par exemple $K^{p,q}(X, Y; \mathscr{C})$ (pour Y fermé dans X) est construit à l'aide de triples $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où ε_1 et ε_2 sont deux graduations qui coïncident au-dessus de Y (cf. [12, §2.1] pour les détails). On a alors $K^{p,q}(X, Y; \mathscr{C}) \approx K^{p,q}(X/Y, \{y\}; \mathscr{C}), p: (X, Y) \to (X/Y, \{y\})$ étant la projection canonique (théorème d'excision). On note $k^{p,q}(X; \mathscr{C})$ (resp. $k^{p,q}(X; A)$) le sous-groupe de $K^{p,q}(X; \mathscr{C})$ (resp. $K^{p,q}(X; A)$) dont les éléments s'annulent lorsqu'on les restreint à un point quelconque de X. En notant $k^{p,q}$ les groupes (discrets) $K^{p,q}(\text{Point}; \mathscr{C}) = K^{p,q}(\mathscr{C})$, on a une décomposition évidente de $K^{p,q}(X; \mathscr{C})$ en la somme directe $k^{p,q}(X; \mathscr{C}) \oplus H^0(X; k^{p,q})$. Si X est un espace à point base x_0, on pose de même

$$\tilde{K}^{p,q}(X; \mathscr{C}) = K^{p,q}(X, \{x_0\}; \mathscr{C}) = \mathrm{Ker}\,(K^{p,q}(X; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(\{x_0\}; \mathscr{C})).$$

Si X est connexe, on a bien entendu $k^{p,q}(X; \mathscr{C}) \approx \tilde{K}^{p,q}(X; \mathscr{C})$. Dans le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie de Banach $\mathscr{P}(A)$, notons enfin $\mathrm{grad}^{p,q}(A, n)$ (resp. $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$) la composante connexe de ε_{q+1} dans $\mathrm{Grad}^{p,q}(n, A)$ (resp. $\mathrm{Grad}^{p,q}(A)$). Compte tenu des définitions et des remarques précédentes, la Proposition 2.2 peut se reformuler ainsi:

PROPOSITION (2.3). *L'application évidente de*

$$\operatorname*{inj\,lim}_n\,[X, \mathrm{grad}^{p,q}(n, A)] \quad \textit{dans } k^{p,q}(X; A)$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE (2.4). *Pour tout espace X paracompact, on a un isomorphisme naturel*

$$\operatorname*{inj\,lim}_n\,[X, K^{p,q}(A) \times \mathrm{grad}^{p,q}(n, A)] \xrightarrow{\approx} K^{p,q}(X; A)(^8).$$

Il est assez facile (et classique, cf. [27] par exemple) de donner une interprétation de l'espace $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ (et par suite de $\mathrm{grad}^{p,q}(n, A)$) en termes d'espace homogène. De manière précise, désignons par $\mathrm{GL}^{p,q}(A)$ le groupe des $A - C^{p,q}$-automorphismes de $C^{p,q+1} \otimes A$ et par $\mathrm{gl}^{p,q}(A)$ la composante neutre de $\mathrm{GL}^{p,q}(A)$. Soit $\mathrm{Gl}^{p,q+1}(A)$ (resp. $\mathrm{gl}'^{p,q+1}(A)$) le sous-groupe de $\mathrm{GL}^{p,q}(A)$ (resp. $\mathrm{gl}^{p,q}(A)$) formé des $C^{p,q+1}$-automorphismes. Soit h l'application de $\mathrm{gl}^{p,q}(A)$ dans $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ définie par $h(g) = g\varepsilon_{q+1}g^{-1}$. Désignons enfin par

$$\bar{h}: \mathrm{gl}^{p,q}(A)/\mathrm{gl}'^{p,q+1}(A) \to \mathrm{grad}^{p,q}(A)$$

l'application induite.

(⁸) On note $K^{p,q}(\mathscr{C})$, $K^{p,q}(A)$ les groupes $K^{p,q}(\text{Point}; \mathscr{C})$, $K^{p,q}(\text{Point}; A)$.

LEMME (2.5). *L'application $\bar{h}$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit ε un élément de $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ qui appartient à l'image de h, soit $\varepsilon=\alpha\varepsilon_{q+1}\alpha^{-1}$. Considérons un élément η de $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ voisin de ε. On a alors l'identité $\eta\beta=\beta\varepsilon$ avec $\beta=(1+\varepsilon\eta)/2$; d'où $\eta=(\beta\alpha)\varepsilon_{q+1}(\beta\alpha)^{-1}$. Ceci montre que h est une application ouverte et que $\mathrm{gl}^{p,q}(A)$ est un fibré principal sur son image. Soient maintenant η un point de l'adhérence de Im h et ε_n une suite de points de $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ telle que $\varepsilon_n \to \eta$. Pour n suffisamment grand, $\beta_n=(1+\varepsilon_n\eta)/2$ sera inversible. En posant $\varepsilon_n=\alpha_n\varepsilon_{q+1}\alpha_n^{-1}$, on aura donc $\eta=h(\beta_n\alpha_n)\in \mathrm{Im}\, h$.

REMARQUE. Les espaces $\mathrm{Grad}^{p,q}(A)$ et $\mathrm{GL}^{p,q}(A)/\mathrm{Gl}^{p,q+1}(A)$ ne sont pas homéomorphes en général (exemple: $p=q=0$ et $A=\boldsymbol{C}$).

COROLLAIRE (2.6). *Pour X compact, le foncteur $K^{p,q}(X; A)$ est représenté par l'espace $K^{p,q}(A)\times \mathrm{inj\,lim}_n\, \mathrm{gl}^{p,q}(n, A)/\mathrm{gl}'^{p,q+1}(n, A)$.*

Nous allons préciser dans ce contexte le théorème fondamental de [12, §2.2]. Ce théorème affirme qu'on a un isomorphisme

$$t\colon K^{p,q+1}(\mathrm{Point}; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(D^1, S^0; \mathscr{C}),$$

donné par une formule du type suivant

$$t(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(E', \eta_1(\theta), \eta_2(\theta)),$$

où E' est le $C^{p,q}$-module sous-jacent à E et où $\eta_i(\theta)=\varepsilon_{q+1}\cos\theta+\eta_i\sin\theta$, $i=1, 2$, est la graduation de E' au-dessus du point $e^{i\theta}$ de $D^1\subset S^1\subset \boldsymbol{C}$, $\theta\in[0, \pi]$. En fait, la même formule permet de définir un homomorphisme

$$t\colon K^{p,q+1}(X; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(X\times D^1, X\times S^0; \mathscr{C})$$

pour tout espace *paracompact* X. Donnons une autre interprétation de t en termes de K-théorie réduite. On suppose donc que X est un espace à point base x_0 et on veut définir un homomorphisme

$$\tilde{t}\colon \tilde{K}^{p,q+1}(X) \to \tilde{K}^{p,q}(SX) \approx K^{p,q}(X\times S^1, \{x_0\}\times S^1 \cup X\times\{1\}),$$

où SX est la suspension de X (la catégorie $\mathscr{C}$ est sous-entendue pour alléger l'écriture). On pose pour cela

$$\tilde{t}(d(E, \eta_1, \eta_2)) = d(E', \eta_1'(\theta), \eta_2'(\theta)),$$

où $\eta_i'(\theta)$, $i=1, 2$ sont les graduations de E' définies au-dessus du point $e^{i\theta}$ de S^1 (plus correctement de $X\times S^1$) par les formules:

$$\begin{aligned}
\eta_1'(\theta) &= \varepsilon_{q+1}\cos\theta+\eta_1\sin\theta,\\
\eta_2'(\theta) &= \varepsilon_{q+1}\cos\theta+\eta_2\sin\theta \quad \text{pour } 0 \leqq \theta \leqq \pi,\\
\eta_2'(\theta) &= \varepsilon_{q+1}\cos\theta+\eta_1\sin\theta \quad \text{pour } \pi \leqq \theta \leqq 2\pi.
\end{aligned}$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \tilde{K}^{p,q+1}(X) \arrow[r, "\tilde{t}"] \arrow[d] & \tilde{K}^{p,q}(SX) \arrow[d] \\ K^{p,q+1}(X) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & K^{p,q}(X\times D^1, X\times S^0) \arrow[d] \\ K^{p,q+1}(\{x_0\}) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & K^{p,q}(\{x_0\}\times D^1, \{x_0\}\times S^0) \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

D'après ce diagramme, $\tilde{t}$ est déterminé par t. Réciproquement d'ailleurs, t est déterminé par $\tilde{t}$ (considérer X^+ réunion disjointe de X et d'un point). Ceci nous permet de considérer indifféremment t ou $\tilde{t}$ suivant la commodité de l'exposé.

D'après [12, §2.2], il est clair que l'homomorphisme généralisé t (donc $\tilde{t}$) est bijectif lorsque X est compact. Dans le cas où X est paracompact, on ne peut s'appuyer sur les techniques de [12]. La raison essentielle pour laquelle les arguments de [12] ne peuvent s'appliquer au cas paracompact est l'impossibilité d'approcher une série de Fourier, dépendant paramétriquement de X, par la somme d'un nombre fini de ses termes (plus précisément de moyennes de Cesàro). Supposons cependant que les foncteurs $\tilde{K}^{p,q}(X)$ soient représentables (pour X paracompact) par des H-espaces pointés $B^{p,q}$ ayant le type d'homotopie de CW-complexes. On doit donc avoir un isomorphisme naturel $\tilde{K}^{p,q}(X)\approx[X, B^{p,q}]'$ où $[\ ,\ ]'$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues respectant les point base. Supposons en outre que l'homomorphisme $\tilde{t}$ soit induit par une application continue

$$t'\colon B^{p,q+1}\to \Omega B^{p,q}(^9).$$

Il résultera alors du Théorème 2.2.2 de [12] que

$$\pi_i(t')\colon \pi_i(B^{p,q+1})\to\pi_i(\Omega B^{p,q})$$

est un isomorphisme. D'après Milnor [21], l'espace $\Omega B^{p,q}$ a aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe. Un théorème bien connu de J. H. C. Whitehead [26] montre que t' est une équivalence d'homotopie(^{10}), ce qui implique que $\tilde{t}$ (donc t)

(^{9}) Le point base de $\Omega B^{p,q}$ n'est pas nécessairement le lacet "constant" au point base de $B^{p,q}$.

(^{10}) $B^{p,q}$ étant un H-espace, toutes les composantes connexes ont le même type d'homotopie.

est un isomorphisme dans le cas paracompact. On peut donc ainsi résumer la discussion précédente:

DEFINITION (2.7). *Une catégorie de Banach $\mathscr{C}$ est dite "CW-représentable" si, pour X paracompact, les foncteurs $\tilde{K}^{p,q}(X;\mathscr{C})$ sont représentables par des H-espaces ayant le type d'homotopie de CW-complexes et si l'homomorphisme $\tilde{t}$ est induit par une application continue entre espaces représentants.*

THEOREME (2.8). *Supposons la catégorie de Banach $\mathscr{C}$ CW-représentable. Alors l'homomorphisme*

$$t\colon K^{p,q+1}(X;\mathscr{C}) \to K^{p,q}(X\times D^1, X\times S^0;\mathscr{C})$$

est un isomorphisme pour tout espace paracompact X.

Considérons maintenant le cas particulier important où $\mathscr{C}=\mathscr{P}(A)$. D'après le Corollaire 2.4, on a un isomorphisme

$$\tilde{K}^{p,q}(X;A) \approx \operatorname{inj}\lim_{n}\, [X, K^{p,q}(A)\times \operatorname{grad}^{p,q}(n,A)]'.$$

De plus, sur les composantes connexes des espaces classifiants, $\tilde{t}$ est de manière évidente induit par une application

$$s'\colon \operatorname{grad}^{p,q+1}(n,A) \to \Omega^0 \operatorname{grad}^{p,q}(2n,A)\text{[11]}$$

où $s'(\varepsilon)$, pour une graduation ε, est défini par la formule:

$$s'(\varepsilon)(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon\sin\theta \qquad \theta\in[0,\pi],$$
$$s'(\varepsilon)(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon_{q+2}\sin\theta \qquad \theta\in[\pi,2\pi].$$

Si nous supposons que l'application $\operatorname{grad}^{p,q}(n,A)\to\operatorname{grad}^{p,q}(n+1,A)$ est une équivalence d'homotopie et que $\operatorname{grad}^{p,q}(A)$ a le type d'homotopie d'un CW-complexes[12], on aura d'après ce qui précède une équivalence d'homotopie

$$s'\colon \operatorname{grad}^{p,q+1}(A) \to \Omega^0 \operatorname{grad}^{p,q}(A).$$

En posant $B^{p,q}=K^{p,q}(A)\times\operatorname{grad}^{p,q}(A)$, on constate alors que les hypothèses du Théorème 2.8 sont satisfaites (la structure de H-espace de $\operatorname{grad}^{p,q}(A)$ étant induite par la somme directe des graduations). D'où la proposition:

PROPOSITION (2.9). *Soit A une algèbre de Banach telle que, quels que soient les entiers p, q et n, l'application*

$$\operatorname{grad}^{p,q}(n,A)\to\operatorname{grad}^{p,q}(n+1,A)$$

---

(11) Ω^0 désigne la composante connexe du lacet $\varepsilon_{q+1}\cos\theta+\varepsilon_{q+2}\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, dans $\operatorname{grad}^{p,q}(2n,A)$, étant entendu que $(C^{p,q+2}\otimes A)^n$ est identifié à $(C^{p,q+1}\otimes A^2)^n$ comme $C^{p,q+1}$-module.

(12) En fait, $\operatorname{grad}^{p,q}(A)$ a toujours le type d'homotopie d'un CW-complexe car il a le type d'homotopie des opérateurs D tels que Spec $D\cap i\boldsymbol{R}=\varnothing$ qui est ouvert dans un espace de Banach convenable (cf. [6, Lemme 1] ou [24]).

soit une équivalence d'homotopie. Alors la catégorie $\mathscr{P}(A)$ est CW-*représentable. En particulier, l'homomorphisme*

$$t\colon K^{p,q+1}(X;A) \to K^{p,q}(X\times D^1, X\times S^0; A)$$

est bijectif pour tout espace paracompact X.

Considérons de nouveau une catégorie de Banach générale $\mathscr{C}$ et une paire (X, Y), où X est paracompact et Y fermé dans X (donc paracompact). On peut alors définir un opérateur de connexion

$$\partial\colon K^{p,q}(Y\times D^1, Y\times S^0; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(X, Y; \mathscr{C}).$$

Indiquons succintement comment ∂ est défini dans ce contexte (nous renvoyons le lecteur à [15] pour plus de détails([13])). Soit donc $d(E, \varepsilon_1(\theta), \varepsilon_2(\theta))$ un élément de $K^{p,q}(Y\times D^1, Y\times S^0; \mathscr{C})$, où E est un $C^{p,q}$-fibré trivial et où $\varepsilon_1(\theta)$ et $\varepsilon_2(\theta)$ sont deux graduations de E (considéré comme fibré sur Y), dépendant continûment d'un paramètre θ variant entre 0 et π. En ajoutant au besoin un triple élémentaire (c'est à dire égal à 0 dans le groupe $K^{p,q}$ correspondant), on peut supposer que $\varepsilon_1(0)$ provient d'une graduation ε de E considéré comme fibré sur X. Un "théorème de prolongement des homotopies" pour les graduations permet alors de prolonger $\varepsilon_1(\theta)$ et $\varepsilon_2(\theta)$ en des graduations $\tilde{\varepsilon}_1(\theta)$ et $\tilde{\varepsilon}_2(\theta)$ de E, considéré comme $C^{p,q}$-fibré sur X, de telle sorte que $\tilde{\varepsilon}_1(0)=\tilde{\varepsilon}_2(0)=\varepsilon$. On pose alors

$$\partial(d(E, \varepsilon_1(\theta), \varepsilon_2(\theta)) = d(E, \tilde{\varepsilon}_1(\pi), \tilde{\varepsilon}_2(\pi)),$$

définition indépendante du choix de prolongements.

PROPOSITION (2.10) (cf. [15]). *Quelle que soit la catégorie de Banach $\mathscr{C}$, on a une suite exacte*

$$K^{p,q}(X\times D^1, X\times S^0; \mathscr{C}) \longrightarrow K^{p,q}(Y\times D^1, Y\times S^0; \mathscr{C}) \xrightarrow{\partial} K^{p,q}(X, Y; \mathscr{C}) \longrightarrow K^{p,q}(X; \mathscr{C}) \longrightarrow K^{p,q}(Y; \mathscr{C}).$$

Notons enfin que les groupes $K^{p,q}$ ne dépendent que de la congruence de $p-q$ mod 8 dans le cas réel et de $p-q$ mod 2 dans le cas complexe (cf. [12, §2.1]). Aussi on écrira souvent K^n au lieu de $K^{p,q}$ lorsque $p-q=n$. Le Théorème 2.8 et la proposition précédente impliquent donc le résultat suivant:

THEOREME (2.11). *Supposons la catégorie de Banach $\mathscr{C}$* CW-*représentable. On a alors une "suite exacte de cohomologie"*

$$K^{n-1}(X; \mathscr{C}) \longrightarrow K^{n-1}(Y; \mathscr{C}) \xrightarrow{\partial^n} K^n(X, Y; \mathscr{C}) \longrightarrow K^n(X; \mathscr{C}) \longrightarrow K^n(Y; \mathscr{C})$$

pour tout espace paracompact X et tout sous-espace fermé Y, ∂^{n-1} étant le composé des homomorphismes t et ∂.

([13]) A vrai dire, on ne s'intéresse dans [15] qu'au cas compact, mais la généralisation au cas paracompact ne présente aucune difficulté.

COROLLAIRE (2.12). *Supposons la catégorie de Banach* $\mathscr{C}$ *CW-représentable. Alors les foncteurs* $K^n(X, Y; \mathscr{C})$, *munis des opérateurs cobord* ∂^n *définis plus haut, constituent une théorie de la cohomologie sur la catégorie des paires* (X, Y) *où* X *est paracompact et* Y *fermé dans* X.

REMARQUE. Il n'est nullement évident a priori qu'il existe des catégories de Banach CW-représentables non triviales. En effet les catégories de Banach usuelles en K-théorie $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$, $\mathscr{P}(\boldsymbol{C})$ et $\mathscr{P}(\boldsymbol{H})$ ne le sont pas. Un des buts du § suivant est d'en construire une, ce qui permettra de démontrer en même temps le Théorème 1.2.

III. Démonstration du Théorème 1.2. Nous allons appliquer les considérations générales du § précédent à la situation suivante: soit H' un espace de Hilbert(14) de dimension infinie et soit B l'algèbre de Banach des endomorphismes continus de H'. Les opérateurs complètement continus forment un idéal bilatère $\mathscr{K}$ dans B et on notera A l'algèbre de Banach quotient $B/\mathscr{K}$. Nous allons voir que cette algèbre de Banach et la catégorie de Banach $\mathscr{P}(A)$ associée jouent un rôle essentiel dans la démonstration du Théorème 1.2. Auparavant, il est bon de remarquer que la categorie $\mathscr{P}(A)$ est équivalente (comme catégorie de Banach) à la catégorie $\mathscr{H}^{\vee}$ considérée dans [13]. En effet, $\mathscr{H}^{\vee}$ est par définition la catégorie de Banach associée à la catégorie prébanachique $\mathscr{H}'$ suivante: les objets de $\mathscr{H}'$ sont les espaces de Hilbert de dimension infinie et les morphismes sont les homomorphismes (bornés) entre espaces de Hilbert considérés modulo les opérateurs complètement continus. Quitte à remplacer $\mathscr{H}'$ par une catégorie équivalente, on peut supposer que les objets de $\mathscr{H}'$ sont H'^n, $n=0, 1, \ldots$. On définit alors un foncteur ψ de $\mathscr{H}'$ dans $\mathscr{L}(A)$ (catégorie des modules libres sur A) par les formules évidentes $\psi(H'^n)=A^n$, $\psi(\alpha)=\alpha$ (écriture matricielle des homomorphismes). Il est trivial que ψ est une équivalence de catégories prébanachiques et que par suite $\tilde{\psi}: \mathscr{H}^{\vee} \to \mathscr{P}(A)$ est une équivalence des catégories de Banach associées. Notons que, de même, la catégorie $\mathscr{P}(B)$ est équivalente à la catégorie $\mathscr{H}$ des espaces de Hilbert (de dimension infinie ou pas). Dans ce contexte, le foncteur évident $\phi: \mathscr{H} \to \mathscr{H}^{\vee}$ s'interprète comme le foncteur extension des scalaires $\mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A)$ défini par la formule usuelle $M \mapsto A \otimes_B M$.

Soit maintenant H un $C^{p,q+2}$-module infini dans le sens du §1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $H = C^{p,q'+1} \otimes H'$ (15), la structure de $C^{p,q'+1}$-module étant induite par le premier facteur du produit tensoriel. Soit aussi D un élément de $\mathscr{F}^{p,q}(H)$. Puisque $D^* = D$ et que $D^{\vee} = \phi(D)$ est inversible, le spectre de $D^{\vee}$ est contenu dans $\boldsymbol{R} - \{0\}$ (cf. [19]). Soit γ^+ (resp. γ^-) une courbe fermée différentiable contenant le spectre de $D^{\vee}$ situé à droite (resp. à gauche) de l'axe

(14) Réel ou complexe suivant la K-théorie envisagée.

(15) On pose $q' = q+1$ pour simplifier l'écriture dans tout ce §.

imaginaire et soit Δ l'élément de $\mathrm{Grad}^{p,q'}(A)$ défini par l'intégrale (qui ne dépend que de $D^{\vee}$):

$$\Delta = I(D^{\vee}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^+}\frac{dz}{1z-D^{\vee}}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma^-}\frac{dz}{1z-D^{\vee}}.$$

En fait, Δ satisfait à la condition supplémentaire $\Delta^* = \Delta$ (on peut définir un adjoint dans la catégorie $\mathscr{H}^{\vee}$ puisque l'adjoint d'un opérateur complètement continu est complètement continu). Notons $\mathrm{Grad}^{p,q'}(A)^*$ le sous-ensemble de $\mathrm{Grad}^{p,q'}(A)$ formé des graduations qui satisfont à cette condition supplémentaire. Notons de même $\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)$ (resp. $\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)^*$) l'ensemble des endomorphismes D de H tels que $D^{\vee} \in \mathrm{Grad}^{p,q'}(A)$ (resp. $\mathrm{Grad}^{p,q'}(A)^*$) et qui anticommutent aux générateurs e_i, ε_j de $C^{p,q'} \subset C^{p,q'+1}$.

LEMME (3.1). *Les applications*

$$\mathscr{F}^{p,q}(H) \longrightarrow \mathrm{Grad}^{p,q'}(A)^*,$$

$$\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A) \xrightarrow{\phi|\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)} \mathrm{Grad}^{p,q'}(A)$$

et

$$\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)^* \xrightarrow{\phi|\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)^*} \mathrm{Grad}^{p,q'}(A)^*$$

sont des équivalences d'homotopie.

Démonstration. Les deux dernières applications sont induites sur un sous-ensemble convenable par la projection

$$Q\colon \mathrm{End}_{\mathscr{H}}\, H \to \mathrm{End}_{\mathscr{H}^{\vee}}\, H.$$

D'après un théorème bien connu [20], Q admet une section globale s (peut-être non linéaire). Si on se restreint aux endomorphismes qui anticommutent aux générateurs de $C^{p,q'}$, soit $\dot{\mathrm{End}}_{\mathscr{H}}\, H$ et $\dot{\mathrm{End}}_{\mathscr{H}}\, H$, on trouve une section $\dot{s}$ de la projection correspondante en posant

$$\dot{s}(\Delta) = \frac{1}{2^{p+q'+1}}\sum_{g\in G^{p,q'}}(-1)^{\omega(g)}g^{-1}s(g\Delta),$$

$\omega(g)$ désignant le degré de g. La même remarque s'appliquant pour l'adjoint, on en déduit que les deux dernières applications du lemme sont des fibrations de fibre contractile. En effet, celle-ci est l'espace vectoriel des opérateurs complètement continus anticommutant aux générateurs de $C^{p,q'}$. Il s'en suit que ces applications sont des équivalences d'homotopie. Notons maintenant $\mathscr{F}^{\vee p,q}(H)$ le sous-ensemble de $\mathrm{End}_{\mathscr{H}^{\vee}}\, H$ image de $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ par le foncteur canonique ϕ. D'après un argument analogue, la projection

$$\mathscr{F}^{p,q}(H) \xrightarrow{\phi|\mathscr{F}^{p,q}(H)} \mathscr{F}^{\vee p,q}(H)$$

est aussi une équivalence d'homotopie. Pour démontrer qu'il en est de même de la première application, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Grad}^{p,q'}(A)^*$ est un rétracte par déformation fort de $\mathscr{F}^{\vee p,q}(H)$. Pour cela, on pose

$$r_t(D) = tD+(1-t)I(D), \qquad t \in [0, 1],$$

$D \in \mathscr{F}^{\vee p,q}(H)$. Alors r_t est la rétraction cherchée.

LEMME (3.2). *L'application d'inclusion*

$$\mathrm{GRAD}^{p,q}(A)^* \to \mathrm{GRAD}^{p,q}(A)$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. L'espace $\mathrm{GRAD}^{p,q}(A)^*$ a le type d'homotopie de $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ qui est ouvert dans un espace de Banach évident. D'après [21] (voir aussi [6, Lemme 1]), $\mathrm{GRAD}^{p,q}(A)^*$ a donc le type d'homotopie d'un CW-complexe. Désignons par $\bar{\mathscr{F}}^{p,q}(H)$ l'ensemble des endomorphismes D de H qui anticommutent aux générateurs de $C^{p,q'}$ et qui sont tels que le spectre de $D^\vee$ ne rencontre pas l'axe imaginaire. Un raisonnement analogue au précédent montre que $\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)$ a le type d'homotopie de $\bar{\mathscr{F}}^{p,q}(H)$. Il en résulte que $\mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)$ a aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe. On est ainsi amené à montrer que l'application d'inclusion induit une bijection

$$\Phi_X\colon [X, \mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)]' \to [X, \mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)]'$$

pour tout espace paracompact X (en fait les sphères suffisent, cf. [26]). Dans ce cas $[X, \mathrm{GRAD}^{p,q}(A)]'$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie de fibrés hilbertiens en $C^{p,q'+1}$-modules infinis sur X, trivialisables et muni d'un endomorphisme D satisfaisant à certaines propriétés (en fait tout fibré de ce type est trivialisable d'après le théorème de Kuiper [6], [18], mais l'application de ce théorème à cet endroit précis n'est pas indispensable). On a une description analogue de l'ensemble $[X, \mathrm{GRAD}^{p,q'}(A)^*]$. Si D est un endomorphisme du fibré E qui ne satisfait pas nécessairement à la condition $D^{\vee *} = D^\vee$, il est facile de changer la métrique de E pour qu'il en soit ainsi. En effet, si $\langle\ ,\ \rangle'$ est la métrique initiale de E, il suffit de poser

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle' + \langle Dx, Dy\rangle'.$$

Alors $D^{\vee *} = D^\vee$ pour la nouvelle métrique car $D^{\vee 2} = 1$. Puisque deux métriques quelconques sont homotopes et que X est paracompact, on peut trivialiser E muni de la nouvelle métrique. En d'autres termes, il existe un automorphisme α du fibré E tel que $\Delta^* = \Delta$ pour l'ancienne métrique, avec $\Delta = \alpha D \alpha^{-1}$ et α homotope à l'identité. Ce raisonnement montre que Φ_X est surjectif. On montrerait de même que Φ_X est injectif en considérant $X \times [0, 1]$.

Les deux lemmes précédents impliquent que l'application

$$\mathscr{F}^{p,q}(H) \to \mathrm{Grad}^{p,q'}(A)$$

est une équivalence d'homotopie. En remplacant H' par H'^n et H par H^n, on démontrerait qu'il en est de même de l'application

$$\mathscr{F}^{p,q}(H^n) \to \mathrm{Grad}^{p,q'}(n, A).$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante:

PROPOSITION (3.3). *Les applications*

$$\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H^n) \to \mathrm{grad}^{p,q'}(n, A)$$

sont des équivalences d'homotopie.

Considérons maintenant un espace de Hilbert E réel, complexe ou quaternionien et désignons par A_E l'algèbre de Banach End $E/\mathscr{K}$ correspondante.

LEMME (3.4). *L'application naturelle de* $\mathrm{GL}(n, A_E)$ *dans* $\mathrm{GL}(n+1, A_E)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. On ne restreint pas la généralité en considérant seulement le cas $n=1$. On a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E \oplus E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(1, A_E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(2, A_E) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des fibrations triviales de fibré contractile d'après un raisonnement déjà éprouvé ($\mathscr{F}(H)$ désignant l'ensemble des opérateurs de Fredholm réels, complexes ou quaternioniens suivant le cas dans l'espace H). On est ainsi amené à démontrer la conclusion du lemme pour la première flèche horizontale du diagramme. Puisque les espaces considérés ont le type d'homotopie de CW-complexes, il suffit de démontrer que

$$[X, \mathscr{F}(E)] \to [X, \mathscr{F}(E \oplus E)]$$

est bijectif pour un espace X compact (en fait une sphère suffit là aussi). Mais ceci est une conséquence bien connue du théorème de Jänich-Atiyah (cf. [3], [8] ou [18] et [23]).

PROPOSITION (3.5). *L'application naturelle*

$$\mathrm{grad}^{p,q'}(n, A) \to \mathrm{grad}^{p,q'}(n+1, A)$$

définie par $\Delta \mapsto \Delta \oplus \varepsilon_{q'+1}$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Les espaces considérés ayant le type d'homotopie de CW-complexes, il suffit de démontrer que cette application induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie π_i, $i=1, 2, \ldots$. D'après le Lemme 2.5, on a deux fibrations localement triviales

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{gl}'^{p,q'+1}(n, A) & \longrightarrow & \mathrm{gl}^{p,q'}(n, A) & \longrightarrow & \mathrm{grad}^{p,q'}(n, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gl}'^{p,q'+1}(n+1, A) & \longrightarrow & \mathrm{gl}^{p,q'}(n+1, A) & \longrightarrow & \mathrm{grad}^{p,q'}(n+1, A). \end{array}$$

On applique alors le lemme précédent et le lemme des cinq aux deux suites exactes d'homotopie correspondantes, en tenant compte de la classification des algèbres de Clifford en fonction d'algèbres de matrices sur les nombres réels, complexes ou quaternioniens [12, §1.1](16).

COROLLAIRE (3.6). *L'application naturelle* $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H) \to \tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H \oplus H)$ *est une équivalence d'homotopie.*

COROLLAIRE (3.7). *La catégorie* $\mathscr{P}(A)$ *est* CW-*représentable au sens de la Définition* 2.7. *En particulier le Corollaire* 2.12 *s'applique à cette catégorie. Les espaces représentants des foncteurs* $K^{p,q'}(X; A) = K^{p,q+1}(X; A)$ *sont les espaces*

$$K^{p,q'}(A) \times \mathrm{grad}^{p,q'}(A) \sim K^{p,q+1}(A) \times \tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H)(^{17}).$$

C'est en effet une conséquence directe de la proposition précédente et des Propositions 2.9 et 3.3.

Fin de la démonstration du Théorème 1.2. En tenant compte du fait que les groupes $K^{p,q}$ ne dépendent que de la différence $p-q$ mod 8, il nous reste à montrer que, pour X compact, on a un isomorphisme $K^n(X) \approx K^{n-1}(X; A)$ avec $n \geqq 1$ par exemple. Cet isomorphisme est décrit en grand détail dans [13] et [15](18); de plus, sa portée générale a été soulignée dans [14] et [16]. Nous nous bornerons donc aux quelques remarques suivantes: Tout d'abord, on a $K^{n-1}(X; A) \approx K^{n-1}(X; \mathscr{H}^{\vee})$ comme conséquence de l'équivalence de catégories de Banach $\mathscr{H}^{\vee}$ et $\mathscr{P}(A)$ notée au début de ce §. En second lieu, on a la suite exacte de catégories prébanachiques

$$0 \to \mathscr{E}_T(X) \to \mathscr{H}_T(X) \to \mathscr{H}^{\vee}_T(X) \to 0$$

où $\mathscr{C}_T(X)$ désigne de manière générale la catégorie des $\mathscr{C}$-fibrés triviaux (cf. §2). Puisque la catégorie $\mathscr{H}_T(X)$ est flasque [14, Définition 3], l'opérateur de connexion

$$\partial^{n-1}: K^{n-1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \to K^n(X; \mathscr{E}) = K^n(X)$$

(16) Pour le calcul des groupes π_1, noter que $\pi_0(\mathrm{gl}'^{p,q'+1}(n, A))$ est le nombre de composantes connexes de $\mathrm{Gl}^{p,q'+1}(n, A)$ contenues dans $\mathrm{gl}^{p,q'}(n, A)$ et qu'une équivalence d'homotopie respecte les composantes connexes.

(17) Le raisonnement précédent montre que la Proposition 3.5 (donc le Corollaire 2.12 pour $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$) est vraie plus généralement pour les algèbres de Banach A telles que GL (n, A') $\to$ GL $(n+1, A')$ soit une équivalence d'homotopie, $A' = A$, $A \otimes_R C$ et $A \otimes_R H$, n quelconque. Une telle algèbre est dite *stable*.

(18) Voir aussi la fin du §4 pour une démonstration "élémentaire" dans l'esprit de cet article.

est un isomorphisme [14, Théorème 7]; une description "concrète" de ∂^{n-1} dans ce cas particulier est donnée dans [13]. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.2.

REMARQUE (3.8). L'équivalence d'homotopie

$$s'\colon \mathrm{grad}^{p,q+1}(A) \to \Omega^0 \,\mathrm{grad}^{p,q}(A)$$

se transporte évidemment sur les espaces $\mathscr{F}^{p,q}$. On a donc ainsi un homéomorphisme $S\colon \mathscr{F}^{p,q+1} \to \Omega^0 \mathscr{F}^{p,q}$ qui est défini par la formule

$$S(D)(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + D\sin\theta \qquad \text{pour } 0 \leqq \theta \leqq \pi,$$

$$S(D)(\theta) = \varepsilon_{q+1}\cos\theta + \varepsilon_{q+2}\sin\theta \qquad \text{pour } \pi \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Comme il a été remarqué dans le §2, cet homéomorphisme correspond sur les groupes de Grothendieck à "l'isomorphisme de Thom":

$$\tilde{K}^{p,q+2}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \to \tilde{K}^{p,q+1}(SX; \mathscr{H}^{\vee}).$$

Pour X compact, ceci redonne l'isomorphisme ordinaire $\tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^{n+1}(SX)$ quand on identifie $K^n(Y)$ à $K^{n-1}(X; \mathscr{H}^{\vee})$ (cf. [13], [15]).

Les raisonnements ci-dessus montrent qu'il existe un candidat naturel pour le foncteur $K^n(X)$, X paracompact, si l'on veut que le Théorème 1.2 reste valable. Il suffit de choisir $K^{n-1}(X; A) \approx K^{n-1}(X; \mathscr{H}^{\vee})$(19). L'avantage de cette définition par rapport à la définition classifique est évidemment que la catégorie $\mathscr{H}^{\vee}$ est CW-représentable. Un autre avantage est que les considérations de [12] relatives aux catégories de Banach, etc. permettent d'étendre immédiatement au cadre paracompact les théorèmes de K-théorie démontrés d'ordinaire dans le cadre compact. Par exemple, on peut démontrer un "isomorphisme de Thom" pour les fibrés spinoriels (dans la formulation de [12, Proposition 3.1.5] ou de [13, Théorème 8] avec des familles de support), en utilisant les techniques de [12] et de [22].

IV. **Relations avec les espaces classifiants classiques.** Depuis les travaux de Bott [5], on connaît bien les espaces classifiants des foncteurs $KU^n(X)$ et $KO^n(X)$ (du moins pour X compact). De manière précise, $KU(X) \approx [X, \boldsymbol{Z} \times BU]$, $KU^1(X) \approx [X, U]$, les espaces correspondant à $KO^n(X)$ étant pour

$n=0$	$\boldsymbol{Z}\times BO$	$n=4$	$\boldsymbol{Z}\times B\,\mathrm{sp}$
$n=1$	U/O	$n=5$	U/Sp
$n=2$	Sp/U	$n=6$	O/U
$n=3$	Sp	$n=7$	O

Cette table est évidemment à rapprocher de celle des algèbres de Clifford $C^n = C^{n,0}$. On peut alors constater que chaque composante connexe de l'espace classifiant de $K^n(X)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{gl}^{p,q}(\infty, k)/\mathrm{gl}'^{p,q+1}(\infty, k)$ pour $n=p-q$(20), ce

(19) Isomorphe aussi au foncteur $\tilde{K}^n(X)$ défini dans [13], définition donnée dans le cadre compact mais qui s'étend immédiatement au cadre paracompact (cf. §4).

(20) On pose $k=\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$ suivant la K-théorie envisagée. Par définition, $\mathrm{gl}^{p,q}(\infty; k) = \text{inj}\lim_n \mathrm{gl}^{p,q}(n, k)$; définition analogue pour les espaces gl′, etc....

qui peut se démontrer en appliquant le Corollaire 2.6. On obtient donc ainsi une démonstration plus simple des théorèmes de Bott qui est d'ailleurs implicite dans les travaux de Wood [27].

Dans ce paragraphe, on se propose de faire le lien entre ces espaces et ceux considérés dans les sections précédentes. Pour cela, considérons un espace de Hilbert H de dimension infinie et posons les définitions suivantes:

$\mathrm{GL}^{p,q}(H)$ est le groupe (connexe) des $C^{p,q}$-automorphismes de $C^{p,q+1} \otimes H$.

$\mathrm{GL}_c^{p,q}(H)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}^{p,q}(H)$ formé des opérateurs D tels que $D^{\vee}=1$.

$\mathrm{Gl}^{p,q+1}(H)$ (resp. $\mathrm{Gl}_c^{p,q+1}(H)$) est le sous-groupe de $\mathrm{GL}^{p,q}(H)$ (resp. $\mathrm{GL}_c^{p,q}(H)$) formé d'automorphismes de $C^{p,q+1}$-modules.

$\mathrm{Grad}^{p,q}(H)$ est l'ensemble des $C^{p,q}$-graduations de $C^{p,q+1} \otimes H$ (i.e. des automorphismes involutifs de $H \otimes C^{p,q+1}$ qui *anticommutent* aux générateurs de $C^{p,q} \subset C^{p,q+1}$) et $\mathrm{grad}^{p,q}(H)$ la composante connexe de ε_{q+1} dans $\mathrm{Grad}^{p,q}(H)$.

Enfin, $\mathrm{Grad}_c^{p,q}(H)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{grad}^{p,q}(H)$ formé des graduations D telles que $D^{\vee}=1$ et $\mathrm{grad}_c^{p,q}(H)$ sa composante connexe. Les applications évidentes

$$\mathrm{GL}^{p,q}(\infty, k) = \operatorname*{inj\,lim}_n \mathrm{GL}^{p,q}(n, k) \to \mathrm{GL}_c^{p,q}(H),$$
$$\mathrm{Gl}^{p,q+1}(\infty, k) = \operatorname*{inj\,lim}_n \mathrm{Gl}^{p,q+1}(n, k) \to \mathrm{Gl}_c^{p,q+1}(H),$$

étant des équivalences d'homotopie (cf. [23]), on voit que $\mathrm{grad}_c^{p,q}(H)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k)$. Soit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gl}''^{p,q+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{gl}^{p,q}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{grad}'^{p,q}(A) \arrow[d] \\
\mathrm{gl}'^{p,q+1}(A) \arrow[r] & \mathrm{gl}^{p,q}(A) \arrow[r] & \mathrm{grad}^{p,q}(A)
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{gl}''^{p,q+1}(A)$ est la composante neutre de $\mathrm{gl}'^{p,q+1}(A)$ et où

$$\mathrm{grad}'^{p,q}(A) = \mathrm{gl}^{p,q}(A)/\mathrm{gl}''^{p,q+1}(A).$$

Ce diagramme montre aussitôt que $\mathrm{grad}'^{p,q}(A)$ est un revêtement de $\mathrm{grad}^{p,q}(A)$. En particulier, $\Omega^0\,\mathrm{grad}'^{p,q}(A)$ a le type d'homotopie de $\Omega^0\,\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ où Ω^0 désigne une composante connexe de l'espace des lacets Ω. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gl}_c^{p,q+1}(H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_c^{p,q}(H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Grad}_c^{p,q}(H) \arrow[d] \\
\mathrm{Gl}^{p,q+1}(H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}^{p,q}(H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{grad}^{p,q}(H) \arrow[d] \\
\mathrm{gl}^{p,q+1}(A) \arrow[r] & \mathrm{gl}^{p,q}(A) \arrow[r] & \mathrm{grad}'^{p,q}(A).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme toutes les fibrations sont évidemment de Serre. D'autre part, d'après le calcul holomorphe dans les algèbres de Banach par exemple, on voit aisément que les espaces du diagramme ont le type d'homotopie de CW-complexes. Enfin, d'après le théorème de Kuiper dans le cas réel, complexe ou quaternionien, les groupes d'homotopie de $\mathrm{GL}^{p,q}(H)$ et de $\mathrm{Gl}^{p,q+1}(H)$, donc de $\mathrm{grad}^{p,q}(H)$, sont nuls. Il en résulte que $\mathrm{grad}^{p,q}(H)$ est contractile et que la fibration

$$\mathrm{Grad}_c^{p,q}(H) \to \mathrm{grad}^{p,q}(H) \to \mathrm{grad}'^{p,q}(A)$$

est "universelle" en un sens évident. De manière précise, on a le lemme bien connu suivant:

LEMME (4.1). *Soit $F \to X \xrightarrow{p} B$ une fibration de Serre, les espaces considérés ayant le type d'homotopie de* CW-*complexes. Alors, si X est contractile, la fibre F a le type d'homotopie de ΩB.*

Démonstration. Soit r_t une rétraction par déformation de X sur un point base. Alors $p(r_t(x))$ est, pour x fixé, un chemin dans B. Ceci définit une application de X dans l'espace des chemins $E(B)$ de B commencant au point base.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "r"] \arrow[dr] & & \Omega(B) \arrow[dl] \\
& X \arrow[r] \arrow[d] & E(B) \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

L'application $\pi_i(F) \to \pi_i(\Omega B) \approx \pi_{i+1}(B)$ induite par r est de manière évidente l'inverse de l'opérateur bord

$$\partial\colon \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F).$$

Le théorème classique de J. H. C. Whitehead [26] permet alors d'achever la démonstration.

COROLLAIRE (4.2). *On a les équivalences d'homotopie*

$$\mathrm{gl}^{p,q}(\infty, k)/\mathrm{gl}'^{p,q+1}(\infty, k) \sim \mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \sim \Omega^0 \mathrm{grad}^{p,q}(A).$$

En particulier, $k^{p,q} \times \Omega^0 \mathrm{grad}^{p,q}(A)$ est un espace classifiant pour le foncteur $K^{p,q}(X; \mathscr{E})$, X compact.

En effet $\mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \sim \mathrm{grad}_c^{p,q}(H) \sim \Omega^0 \mathrm{grad}'^{p,q}(A) \sim \Omega^0 \mathrm{grad}^{p,q}(A)$.

COROLLAIRE (4.3). *On a les équivalences d'homotopie*

$$\mathrm{gl}^{p,q}(\infty, k)/\mathrm{gl}'^{p,q+1}(\infty, k) \sim \mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \sim \mathrm{grad}^{p,q+1}(A)\text{[21]}.$$

[21] Ce corollaire est la traduction "homotopique" de la conjecture d'Atiyah-Singer. Sa démonstration est, comme on le voit, parallèle à celle du Théorème 1.2 et ne présente aucune nouveauté essentielle.

En effet, $\Omega^0\,\mathrm{grad}^{p,q}(A)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{grad}^{p,q+1}(A)$ d'après le Corollaire 3.7 et le Théorème 2.8. Bien entendu, on peut remplacer les espaces $\mathrm{grad}^{p,q+1}(A)$ par $\tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H)$ si on le désire d'après la Proposition 3.3.

REMARQUES. Le Corollaire 4.2 est de nature purement homotopique et ne dépend pas, par exemple, des théorèmes de périodicité de Bott. Le Corollaire 4.3 est par contre intimement lié à ceux-ci d'après les considérations des §§2 et 3. Nous nous proposons maintenant de décrire *explicitement* une équivalence d'homotopie

$$S\colon \mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \to \mathrm{grad}^{p,q+1}(A).$$

Comme nous le verrons à la fin du §4, l'existence d'une telle application (jointe à la vérification de certaines de ses propriétés) permet en fait de donner une nouvelle démonstration des théorèmes de périodicité de Bott (dans le cas classique).

Avant de continuer dans cette voie, il devient indispensable de faire le lien entre les définitions introduites dans cet article et celles d'un article antérieur sur les opérateurs de Fredholm [13]. Rappelons qu'on a défini dans [13] un groupe $\bar{K}^{p,q}(X)$(22) qui s'explicite ainsi: on considère les couples (E, D) où E est un fibré hilbertien muni d'une structure de $C^{p,q+1}$-module et où D est une famille continue d'opérateurs de Fredholm auto-adjoints dans E qui anti-commute aux générateurs de $C^{p,q+1}$. Un tel couple est dit acyclique si D est une famille d'opérateurs inversibles. Le groupe $\bar{K}^{p,q}(X)$ est alors le quotient de l'ensemble de ces couples par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de couples acycliques. Par définition, $\bar{k}^{p,q}(X)$ est le sous-groupe de $\bar{K}^{p,q}(X)$ formé des éléments qui s'annulent sur chaque point de X. On a alors un homomorphisme de groupes évident

$$\Phi\colon [X, \tilde{\mathscr{F}}^{p,q}] \to \bar{k}^{p,q}(X).$$

PROPOSITION (4.4). *L'homomorphisme Φ est bijectif.*

Démonstration. Grâce au théorème de Kuiper appliqué au cas réel, complexe ou quaternionien, il est clair que Φ est surjectif. Soit maintenant $f\colon X \to \tilde{\mathscr{F}}^{p,q}(H)$ une application continue telle que $\Phi(f)=0$. En appliquant de nouveau le théorème de Kuiper, on déduit l'existence d'un nouvel espace de Hilbert H' tel

$$f \oplus (\varepsilon_{q+1})_{C^{p,q+2}\otimes H'}$$

soit homotope à $(\varepsilon_{q+1})_{C^{p,q+2}\otimes(H\oplus H')}$ (de manière générale on note $(\varepsilon_{q+1})_L$ l'action du dernier générateur de $C^{p,q+1}$ sur un $C^{p,q+1}$-module L). Comme on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $H'=H$, il en résulte que D est homotope à $(\varepsilon_{q+1})_H$ d'après le Corollaire 3.6.

REMARQUE On pourrait définir aussi bien une application

$$[X, \mathscr{F}^{p,q}(H)] \to \bar{K}^{p,q}(X).$$

(22) Dans [13] on supposait X compact, mais cette restriction est inutile ici, le bon cadre étant celui où X est paracompact.

Celle-ci est encore surjective, mais non injective si $X \neq \varnothing$ et si $p-q \equiv 1 \bmod 4$ dans le cas réel, $p-q \equiv 1 \bmod 2$ dans le cas complexe.

Nous allons avoir besoin de l'isomorphisme Φ lorsque X est une sphère. Dans cette optique, il est particulièrement intéressant d'avoir une description concrète des générateurs des groupes $\bar{K}^p(S^q) \approx \bar{K}^p(S^q) \approx \bar{K}^p_c(\boldsymbol{R}^q)$, $\bar{K}^p_c(\boldsymbol{R}^q)$ désignant le groupe $\bar{K}^p$ à support compact de $\boldsymbol{R}^q$ (cf. [13], [15])([23]). Ce groupe est isomorphe à $\bar{K}^{p,q}$.(Point) par l'homomorphisme fondamental ([13], Théorème 8)

$$\bar{t}\colon \bar{K}^{p,q}(\text{Point}) \to \bar{K}^p_c(\boldsymbol{R}^q) \approx \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2 \quad \text{ou} \quad 0.$$

Pour expliciter un générateur, nous devons faire appel au lemme technique suivant:

Lemme (4.5). *Soit X un espace compact et soit $T^{p,q}(X)$ le sous-groupe de $K^{p,q}(X)$ formé des éléments x qui peuvent s'écrire $d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$* (cf. [12, §2.4]). *Alors, si*

$$j\colon \bar{K}^{p,q}(X) \to K^{p,q}(X)$$

est l'isomorphisme défini dans [13], *on a $j^{-1}(x) = \sigma(E', 0)$ où E' est le fibré hilbertien de dimension finie coïncidant avec E comme $C^{p,q}$-module, le dernier générateur de $C^{p,q+1}$ opérant par la graduation $-\varepsilon$.*

Démonstration. Suivons soigneusement la définition de l'isomorphisme j telle qu'elle est décrite dans [13], [15]. Soit H un $C^{p,q+1}$ fibré hilbertien sur X tel que H et $E' \oplus H$ puissent être munis d'une structure de $C^{p,q+2}$-module compatible avec les structures de $C^{p,q+1}$-module (cf. [13, Lemme 1]). On note η_H et $\eta_{E' \oplus H}$ l'action du dernier générateur de $C^{p,q+2}$ sur H et $E' \oplus H$ respectivement. On note de même ε_H, $\varepsilon_{E'}$ et $\varepsilon_{E' \oplus H}$ l'action de l'avant-dernier générateur de $C^{p,q+2}$ sur H, E' et $E' \oplus H$ (noter que $\varepsilon_{E'} = -\varepsilon$). On a donc $\varepsilon_{E' \oplus H} = \varepsilon_{E'} \oplus \varepsilon_H$. L'image de $x = \sigma(E', 0)$ dans $K^{p,q+1}(\mathscr{H}^\vee(X)) \approx K^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^\vee)$ s'écrit alors $y = d(E' \oplus H, \eta_{E' \oplus H}, 0 \oplus \eta_H)$. Soit $\phi\colon \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}^\vee(X)$ le foncteur canonique et soit

$$\partial^{p,q+1}\colon K^{p,q+1}(\mathscr{H}^\vee(X)) \to K^{p,q}(\phi)$$

l'opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie associée au foncteur ϕ (cf. [15], [10]). Pour calculer $\partial^{p,q+1}(y)$, on doit relever les homotopies

$$\check{\varepsilon}_{E' \oplus H} \cos \theta + \check{\eta}_{E' \oplus H} \sin \theta \quad \text{et} \quad \check{\varepsilon}_{E' \oplus H} \cos \theta + (0 \oplus \check{\eta}_H) \sin \theta$$

dans la catégorie $\mathscr{H}(X)$, $\theta \in [0, \pi]$. La première homotopie se relève évidemment en $\varepsilon_{E' \oplus H} \cos \theta + \eta_{E' \oplus H} \sin \theta$ et la seconde en $\varepsilon_{E'} \oplus (\varepsilon_H \cos \theta + \eta_H \sin \theta)$. En faisant $\theta = \pi$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \partial^{p,q+1}(y) &= d(E \oplus H, -\varepsilon_{E'} \oplus (-\eta_H), \varepsilon_{E'} \oplus (-\eta_H)) \\ &= d(E, \varepsilon, -\varepsilon) = k(d(E, \varepsilon, -\varepsilon)) \end{aligned}$$

avec les notations de [13]([24]). Donc $j(x) = d(E, \varepsilon, -\varepsilon)$. C.Q.F.D.

([23]) Dans ces références, le groupe $\bar{K}^p_c(\boldsymbol{R}^q)$ est noté simplement $\bar{K}^p(\boldsymbol{R}^q)$. La dernière notation ayant une signification différente dans cet article, nous ne pouvons l'employer ici.

([24]) Il se présente ici une légère confusion de notation (qui est inévitable) entre le corps k et l'homomorphisme k défini dans [13].

L'intérêt de ce lemme pour notre propos réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION (4.6). *Supposons X réduit à un point. Alors $T^{p,q}(X)=K^{p,q}(X)$.*

Cette proposition est en fait un cas particulier d'une proposition de [17] plus générale qui exprime le même résultat pour un espace X tel que $KO^1(X)=KU^1(X)=\mathrm{K\,sp}^1(X)=0$. Dans le cas où X est réduit à un point, on peut aussi faire une vérification cas par cas: cf. [9] ou [1].

Dans les propositions suivantes, nous adopterons ces conventions: si M est un $C^{p,q+1}$-module, nous noterons M' le $C^{p,q+1}$-module qui coïncide avec M comme $C^{p,q}$-module et tel que $(\varepsilon_{q+1})_{M'}=-(\varepsilon_{q+1})_M$. Si E est un fibré vectoriel trivial de fibre M', nous noterons encore M' le fibré E.

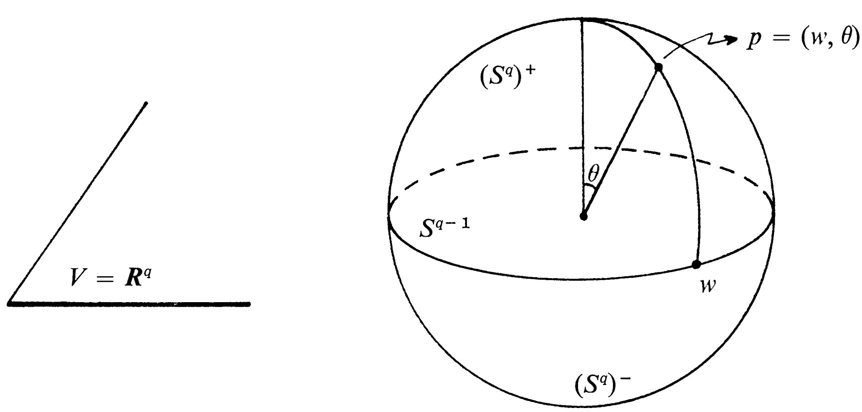
PROPOSITION (4.7). *Soit M un $C^{p,q+1}$-module irréductible et soit π la projection de $\boldsymbol{R}^q$ sur le point. Désignons par "v" l'opérateur de Fredholm sur π^*M' coïncidant avec la multiplication par le nombre de Clifford v au-dessus du point v de $\boldsymbol{R}^q\subset C^{0,q}\subset C^{p,q}$. Désignons encore par M' le $C^{p,1}$-module obtenu à partir de M' par restriction des scalaires. Alors $\sigma(M', v)$ est un générateur de $\overline{K}_c^p(\boldsymbol{R}^q)$.*

Démonstration. D'après la discussion précédente, M définit un générateur de $K^{p,q}$(Point). Il suffit alors d'appliquer l'isomorphisme de [13]

$$\bar{t}\colon \overline{K}^{p,q}(\text{Point})\to \overline{K}_c^p(\boldsymbol{R}^q).$$

REMARQUE. Bien entendu, si on s'intéresse exclusivement aux générateurs, on peut sans inconvénient remplacer M' par M à la fin de l'énoncé précédent. La nécessité de ce distinguo apparaîtra progressivement. Notons simplement que, si l'on veut identifier les groupes $K^p(S^q)$ et $\overline{K}^p(S^q)$ par l'isomorphisme j, on doit distinguer entre M et M' (cf. Lemme 4.5).

Nous allons maintenant décrire de manière explicite le générateur de $\overline{K}_c^p(\boldsymbol{R}^q)$ lorsqu'on identifie ce dernier groupe à $\tilde{K}^p(S^q)$ (par excision). Pour cela, nous paramètrons la sphère S^q en choisissant des coordonnées polaires



où w est un point de la sphère $S(V)=S^{q-1}$. Avec les notations d'usage, nous avons aussi

$$S^q = (S^q)^+ \cup (S^q)^-, \qquad S^{q-1} = (S^q)^+ \cap (S^q)^-.$$

On identifiera en outre $\boldsymbol{R}^q$ à $S^q-(S^q)^+$. Grâce à cette identification et après une homotopie convenable, le générateur de $\bar{K}_c(\boldsymbol{R}^q)=\bar{K}_c(S^q-(S^q)^+)$ peut s'écrire $\sigma(M',\Delta)$, où Δ est l'opérateur de Fredholm défini au-dessus du point (w,θ) de $S^q-(S^q)^+$ par la formule

$$\Delta = w\sin\theta \in \boldsymbol{R}^q \subset C^{p,q}.$$

On a de manière évidente $\sigma(M',\Delta)=\sigma(M'\oplus \overline{M}'\oplus M'\oplus \overline{M}'\oplus\cdots,\Delta')$, où on pose

$$\Delta'(P) = w\sin\theta \oplus \begin{pmatrix} -w\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & w\sin\theta \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -w\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & w\sin\theta \end{pmatrix} \oplus\cdots \tag{2}$$

$$(\theta\in[\pi/2,\pi]).$$

En outre, on peut prolonger Δ' à toute la sphère S^q en posant

$$\Delta'(P) = \begin{pmatrix} w\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -w\sin\theta \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} w\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -w\sin\theta \end{pmatrix} \oplus\cdots \tag{1}$$

pour $P\in(S^q)^+$, soit $\theta\in[0,\pi/2]$. Grâce au théorème d'excision pour les groupes $\bar{K}$ [15], on prouve ainsi la proposition suivante:

Proposition (4.8). *Soit M un $C^{p,q+1}$-module irréductible. Pour chaque point w de $S^{q-1}\subset \boldsymbol{R}^q\subset C^{p,q+1}$, désignons encore par w l'action du nombre de Clifford w sur M'. Un générateur de $\tilde{K}^p(S^q)$ est alors $\sigma(\tilde{M}',\Delta')$ où $\tilde{M}'=M'\oplus\overline{M}'\oplus\cdots$, regardé comme un $C^{p,1}$-module, et où, au-dessus d'un point $P=(w,\theta)$ de S^q, l'opérateur Δ' est défini par la formule* (1) *pour $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ et par la formule* (2) *pour $\pi/2\leqq\theta\leqq\pi$.*

On va écrire sous une autre forme la matrice infinie Δ'. En effet, on a[25]

$$\Delta'(P) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

[25] De telles matrices ont été considérées par Jacobi (cf. [25], p. 282).

où les coefficients a_i, b_i et c_i sont des fonctions de P définies par les formules suivantes

$$a_i = (-1)^{i+1} w \sin \theta$$

$$c_i = b_i = \frac{\cos \theta + |\cos \theta|}{2} \quad \text{lorsque } i \text{ est impair}$$

$$= \frac{\cos \theta - |\cos \theta|}{2} \quad \text{lorsque } i \text{ est pair.}$$

Notons que les coefficients a_i, b_i et c_i satisfont aux relations suivantes

$$\begin{aligned} a_i b_i + b_i a_{i+1} &= 0 \\ b_i b_{i+1} = c_{i+1} c_i &= 0 \\ c_i a_i + a_{i+1} c_i &= 0 \\ (a_i)^2 + b_i c_i + c_{i-1} b_{i-1} &= 1 \quad \text{pour } i > 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Bien entendu, ces relations impliquent que $\Delta'(P)$ est en fait une graduation dans la catégorie $\mathscr{H}^{\vee}$.

Si on désigne par ε la graduation de M, l'automorphisme $\zeta = \cos \theta + \varepsilon w \sin \theta = \varepsilon(\varepsilon \cos \theta + w \sin \theta)$ est de norme un ainsi que son inverse (la structure de $C^{p,q}$-module de M est supposée compatible avec la métrique). On va tâcher d'exprimer les coefficients a_i, b_i et c_i en "série de Fourier" par rapport à ζ, ce qui nous sera utile plus loin (comparer avec [12, §2.2]). Pour cela, w étant fixé, on commence par prolonger b_i et c_i (resp. a_i) considérés comme fonctions de θ, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, en des fonctions périodiques paires (resp. impaires) de θ. Un calcul simple montre alors que

$$a_i = (-1)^{i+1}(\varepsilon(\zeta - \zeta^{-1})/2),$$

$$c_i = b_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \zeta^n \quad \text{pour } i \text{ impair,}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \zeta^n \quad \text{pour } i \text{ pair,}$$

où les coefficients λ_n et μ_n s'expriment par les intégrales

$$\begin{aligned} \lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| \leqq \pi/2} b_i(\theta) \zeta^{-n} \, d\theta &= 1/\pi && \text{pour } n = 0 \\ &= 1/4 && \text{pour } n = 1 \text{ ou } -1 \\ &= \frac{(-1)^{|n/2+1|}}{\pi(n^2-1)} && \text{pour } n \text{ pair } \neq 0 \\ &= 0 && \text{pour } n \text{ impair } \neq 1 \text{ ou } -1 \\ \mu_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2 \leqq |\theta| \leqq \pi} b_i(\theta) \zeta^{-n} \, d\theta &= -1/\pi && \text{pour } n = 0 \\ &= 1/4 && \text{pour } n = 1 \text{ ou } -1 \\ &= \frac{(-1)^{|n/2|}}{\pi(n^2-1)} && \text{pour } n \text{ pair } \neq 0 \\ &= 0 && \text{pour } n \text{ impair } \neq 1 \text{ ou } -1. \end{aligned} \tag{4}$$

LEMME (4.9). *Les coefficients λ_n et μ_n satisfont aux identités suivantes*

$$\sum_{n+m=r} \lambda_n\mu_m = 0$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \sum_{n+m=r} (\lambda_n\lambda_m+\mu_n\mu_m) &= 0 && \text{si } r \neq 0, 2, -2 \\ &= 1/2 && \text{si } r = 0 \\ &= 1/4 && \text{si } r = +2 \text{ ou } -2 \end{aligned}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n = 1 \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\lambda_n = 0$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n = 0 \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\mu_n = 1.$$

C'est en effet une conséquence formelle des identités (3) et de l'unicité du développement en série de Fourier associé à une fonction périodique (noter que λ_n et μ_n sont $O(1/n^2)$).

COROLLAIRE (4.10). *Soient ε et η deux graduations auto-adjointes d'un espace vectoriel M et soit $\zeta=\varepsilon\eta$. Désignons par a_i, b_i et c_i les endomorphismes de M définies par les expressions*

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_i &= (-1)^{i+1}(\varepsilon(\zeta-\zeta^{-1})/2), \\ c_i = b_i &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n\zeta^n \quad \text{pour } i \text{ impair}, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n\zeta^n \quad \text{pour } i \text{ pair}, \end{aligned}$$

où les coefficients λ_n et μ_n sont donnés par les formules (4). *Ces endomorphismes satisfont alors aux identités* (3). *Enfin, si $\varepsilon=\eta$, on a $a_i=0$ et $c_i=b_i=1$ si i est impair, $c_i=b_i=0$ si i est pair; si $\varepsilon=-\eta$, on a $a_i=0$ et $c_i=b_i=0$ si i est impair, $c_i=b_i=1$ si i est pair.*

Démonstration[26]. Il suffit de noter que $\varepsilon(\zeta-\zeta^{-1})=-(\zeta-\zeta^{-1})\varepsilon$ et que, par conséquent, $(a_i)^2=1/2-\zeta^2/4=\zeta^{-2}/4$. Les identités (3) se déduisent alors par simple calcul formel des identités (5), les séries considérées étant absolument convergentes puisque $\|\zeta\|=\|\zeta^{-1}\|=1$.

Ce corollaire va nous permettre de définir l'application cherchée

$$S: \text{grad}^{p,q}(\infty, k) \to \text{GRAD}'^{p,q+1}(A)^* \subset \mathscr{F}^{p,q}(H)\,(^{27}).$$

Pour cela, écrivons H sous la forme $L' \oplus \bar{L}' \oplus \cdots$, L étant un $C^{p,q+1}$-espace de

[26] Voir aussi la démonstration des Lemmes 4.15 et 4.16.

[27] Rappelons (cf. §3) que les espaces $\text{GRAD}^{p,q+1}(A)^*$, $\text{GRAD}^{p,q+1}(A)$, $\text{Grad}^{p,q+1}(A)^*$, $\text{Grad}^{p,q+1}(A)$ et $\mathscr{F}^{p,q}(H)$ ont le même type d'homotopie. On désigne par $\text{GRAD}'^{p,q+1}(A)$ la composante connexe de ε_{q+2} dans $\text{GRAD}^{p,q+1}(A)$.

Hilbert infini, par exemple $C^{p,q+1} \otimes H''$ où H'' est de dimension infinie. Si M est un $C^{p,q}$-module de dimension finie et de graduation η qui est plongé dans L, on peut lui associer la graduation $\eta' = -\eta \oplus (\varepsilon_{q+1})_{M'^{\perp}}$, M' étant évidemment plongé dans L'. L'application $\eta \mapsto \eta'$ permet ainsi de considérer $\mathrm{Grad}^{p,q}(M)$ comme plongé dans $\mathrm{Grad}^{p,q}(L')$. Ceci dit, soit

$$s_M\colon \mathrm{Grad}^{p,q}(M) \to \mathrm{GRAD}^{p,q+1}(A)^*$$

l'application définie par

$$s(\eta) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

les coefficients a_i, b_i et c_i étant les endomorphismes de L' définies par les formules (6), avec $\varepsilon = (\varepsilon_{q+1})_M = (-\varepsilon_{q+1})_{L'}$ et les conventions faites ci-dessus. De manière précise, on a donc

$$a_i = (-1)^{i+1} \frac{(\eta - \varepsilon\eta\varepsilon)}{2} = (-1)^{i+1} \frac{\varepsilon\eta'\varepsilon - \eta'}{2}.$$

On vérifie sans peine que S_M est une application continue de $\mathrm{Grad}^{p,q}(M)$ dans l'espace des matrices infinies et, qu'en outre, $S_M(\eta)$ anticommute aux générateurs de $C^{p,q+1}$ et est de carré un dans la catégorie $\mathscr{H}^{\vee}$ d'après le Corollaire 4.10. D'autre part, la dernière partie de ce corollaire permet de voir aussi que $S_M((\varepsilon_{q+1})_M)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

qui peut être choisie comme point base ε_{q+2} de $\mathrm{GRAD}^{p,q+1}(A)^*$. De là on déduit que S_M est compatible avec les inclusions $\mathrm{Grad}^{p,q}(M) \subset \mathrm{Grad}^{p,q}(n, k) \subset \mathrm{Grad}^{p,q}(L')$, si M est plongé dans $C^{p,q+1} \otimes k^n$. Donc S_M induit une application continue

$$S\colon \mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \to \mathrm{GRAD}'^{p,q+1}(A)^* \subset \mathscr{F}^{p,q}(H).$$

THEOREME (4.11). *L'application S est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. L'application S étant compatible avec la "périodicité" des espaces Grad, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $q=0$ pour simplifier les calculs. D'autre part, les espaces considérés ayant le type d'homotopie de CW-complexes, on est ramené à démontrer que

$$\pi_q(S)\colon \pi_q(\mathrm{grad}^{p,0}(\infty, k)) \to \pi_q(\mathrm{GRAD}'^{p,q+1}(A)^*)$$

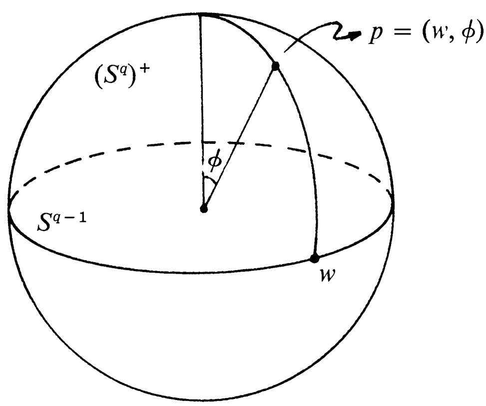
est un isomorphisme pour $q=1, 2, \ldots$ ([28]). D'après le §3, ces groupes d'homotopie sont 0, $\boldsymbol{Z}$ ou $\boldsymbol{Z}_2$ suivant les mêmes composantes. Il suffit donc de vérifier que $\pi_q(S)$ échange les générateurs. Un générateur du deuxième groupe d'homotopie a été précisément décrit dans la Proposition 4.8 grâce à un $C^{p,q+1}$-module irréductible M. Cherchons un générateur du premier groupe d'homotopie en faisant appel à l'isomorphisme

$$t\colon K^{p,q}(\text{Point}) \to K^p((S^q)^+, S^{q-1})$$

démontré dans [12, §2.2]. Celui-ci est défini par la formule

$$t(d(E, v, w; \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = d(\pi^*E, v; w \sin \phi + \varepsilon_1 \cos \phi, w \sin \phi + \varepsilon_2 \cos \phi)$$

($\pi\colon (S^q)^+ \to$ Point, v représentant l'action de $C^{p,0}$ et w celle de $C^{0,q}$).



Puisque $K^{p,q}(\text{Point}) = T^{p,q}(\text{Point})$ (Proposition 4.6), on peut supposer que $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ (disons). On va transformer maintenant les graduations de π^*E de manière à obtenir une graduation "constante" sur S^{q-1}. En effet, de l'identité

$$g \cdot \varepsilon = (w \sin \varepsilon + \varepsilon \cos \phi) \cdot g \quad \text{avec } g = \cos \phi/2 + w\varepsilon \sin \phi/2,$$

on déduit que

$$\begin{aligned} d(E, v; w \sin \phi + \varepsilon \cos \phi, w \sin \phi - \varepsilon \cos \phi) &= d(E, v; \varepsilon, g^{-1}(w \sin \phi - \varepsilon \cos \phi)g) \\ &= d(E, v; \varepsilon, -\varepsilon \cos 2\phi + w \sin 2\phi). \end{aligned}$$

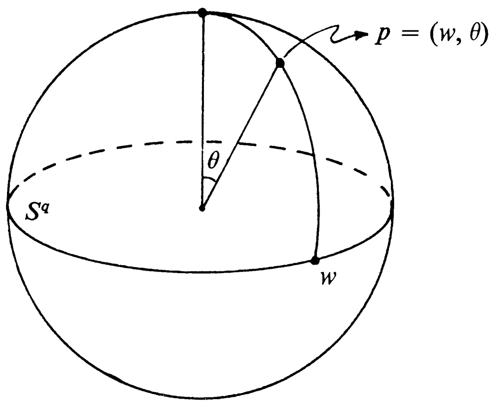
Par excision et en faisant le changement de variables $\pi - \theta = 2\phi$ (ce qui revient à mettre le point base de S^q su pôle nord), on déduit la proposition suivante:

([28]) Voir cependant la fin du paragraphe pour une démonstration plus directe.

PROPOSITION (4.12). *Soit M un $C^{p,q}$-module gradué irréductible de graduation ε. Un générateur de* $\pi_q(\mathrm{grad}^{p,0}(\infty, k))$ *est alors induit par l'application*

$$\eta: S^q \to \mathrm{Grad}^{p,0}(M) \subset \mathrm{Grad}^{p,0}(\infty, k),$$

où $\eta(P) = \varepsilon \cos\theta + w \sin\theta$.



REMARQUE. On a pris soin de choisir ce générateur de manière à ce qu'il corresponde à celui défini dans la Proposition 4.8 par l'isomorphisme $j: \bar{K}^p(S^q) \to K^p(S^q)$. Notons au passage que j est compatible avec les isomorphismes t et $\bar{t}$ (cf. [15]).

Fin de la démonstration du Théorème 4.11. Avec les notations du Corollaire 4.10 on a, pour $\eta = \varepsilon\cos\theta + w\sin\theta$, $\zeta = \cos\theta + \varepsilon w \sin\theta$. Il s'en suit que les coefficients a_i, b_i et c_i de ce même corollaire sont simplement

$$\begin{aligned} a_i &= (-1)^{i+1} w \sin\theta, \\ b_i = c_i &= (\cos - |\cos\theta|)/2 \quad \text{pour } i \text{ pair}, \\ &= (\cos + |\cos\theta|)/2 \quad \text{pour } i \text{ impair}, \end{aligned}$$

d'après les formules (5). Donc $S(\eta)$ est bien le générateur $\sigma(E', \Delta')$ de $\bar{K}^p(S^q) = \pi_q(\mathrm{GRAD}'^{p,0}(A))$ d'après la Proposition 4.8.

L'équivalence d'homotopie $S: \mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \xrightarrow{\approx} \mathrm{GRAD}'^{p,q+1}(A)^*$ peut se décrire de manière un peu plus géométrique en K-théorie (sans utiliser les espaces classifiants). De manière précise, soit M un $C^{p,q}$-fibré de dimension finie et de base *compacte* X, muni de deux graduations ε et η. Soit E le fibré hilbertien $M \oplus \bar{M} \oplus M \oplus \cdots$ muni de la graduation

$$\varepsilon_{q+1} = (-\varepsilon) \oplus \varepsilon \oplus (-\varepsilon) \oplus \cdots \qquad \text{(noter les signes).}$$

Désignons par $J(\varepsilon, \eta)$ la graduation de $E^{\vee}$ définie par la "matrice de Jacobi"

$$J(\varepsilon, \eta) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

où $a_i = (-1)^{i+1}\varepsilon(\zeta - \zeta^{-1})/2$ avec $\zeta = \varepsilon\eta$,

$$c_i = b_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \zeta^n \quad \text{pour } i \text{ impair,}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \zeta^n \quad \text{pour } i \text{ pair (cf. les formules (4)).}$$

Enfin, soit ξ la graduation "constante" de E définie par la matrice

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

THEOREME (4.13). *L'homomorphisme, noté encore S, de $K^{p,q}(X; \mathscr{E})$ dans $K^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^{\vee})$ défini par la formule*

$$S(d(M; \varepsilon, \eta)) = d(E^{\vee}; \xi, J(\varepsilon, \eta))$$

est bijectif pour tout espace compact X.

Démonstration[29]. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^{p,q}(X; \mathscr{E}) & \xrightarrow{\quad s \quad} & k^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{p,q}(X; \mathscr{E}) & \xrightarrow{\quad S \quad} & H^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X; K^{p,q}(\text{Point})) & \xrightarrow{H^0(X;\, S)} & H^0(X; K^{p,q+1}(\text{Point}; \mathscr{H}^{\vee})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

[29] Voir aussi la fin de ce paragraphe pour une démonstration plus directe.

où s est induit par l'équivalence d'homotopie $\mathrm{grad}^{p,q}(\infty, k) \sim \mathrm{grad}^{p,q+1}(A)$ (cf. Proposition 2.3). Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque X est réduit à un point. Dans ce cas, on peut supposer que $\eta = -\varepsilon$ (Proposition 4.6). D'après le Corollaire 4.10, on a donc $\zeta = -1$, $a_i = 0$, $c_{i+1} = b_i = 0$ si i est impair, $c_{i+1} = b_i = 1$ si i est pair. Par suite

$$J(\varepsilon, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après un calcul analogue à celui de Lemme 4.6, on voit que $\partial^{p,q+1} d(E^{\vee}; \xi, J(\varepsilon, \eta)) = d(M; \varepsilon, -\varepsilon)$. Puisque $\partial^{p,q+1}$ est un isomorphisme, le théorème est démontré.

Dans le cas où X est un point, la démonstration précédente montre que s est l'homomorphisme inverse de $\partial^{p,q+1}$. On a plus généralement le théorème important suivant:

THEOREME (4.14). *L'homomorphisme*

$$S\colon K^{p,q}(X; \mathscr{E}) \to K^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^{\vee})$$

est inverse à droite(30) *de l'homomorphisme de connexion*

$$k^{-1} \cdot \partial^{p,q+1}\colon K^{p,q+1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \to K^{p,q}(X; \mathscr{E})$$

défini dans [13] *ou* [15].

Démonstration(31). Soit $G(\phi, \theta)$ la fonction continue, périodique par rapport à ϕ et θ de période 2π, définie par

$$\begin{aligned} G(\phi, \theta) &= \cos\phi - i \sin\phi \sin\theta && \text{pour } 0 \leqq \theta \leqq \pi/2,\ 0 \leqq \phi \leqq \pi \\ &= \cos(F(\phi, \theta)) - i \sin(F(\phi, \theta)) && \text{pour } \pi/2 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \phi \leqq \pi \end{aligned}$$

avec $F(\phi, \theta) = 2\phi(\pi - \theta)/\pi$,

$$G(-\phi, \theta) = G(\phi, +\theta) = \bar{G}(\phi, -\theta).$$

Désignons par

$$\sum \sigma_{p,q} e^{ip\theta} e^{iq\phi}$$

son développement en série de Fourier. Si ε et η sont deux graduations de M, on pose de même

$$G(\varepsilon, \eta, \phi) = \sum \sigma_{p,q} \zeta^p e^{iq\phi} \quad \text{avec } \zeta = \varepsilon\eta$$

(30) En fait S est aussi inverse à gauche puisque c'est un isomorphisme d'après les calculs antérieurs. L'avantage de la formulation adoptée est de permettre une démonstration simultanée de la conjecture d'Atiyah-Singer et des théorèmes de périodicité de Bott (cf. l'appendice 4).

(31) Cette démonstration est indépendante des théorèmes précédents et peut donc être qualifiée "d'élémentaire." Elle utilise essentiellement le calcul spectral des opérateurs unitaires.

(la sommation est prise au sens de Cesàro). Le théorème se déduit alors par simple calcul des deux lemmes suivants en remarquant que l'homotopie $\tilde{\varepsilon}^{\vee} \cos \phi + \xi^{\vee} \sin \phi$ se relève en $\tilde{\varepsilon} \cos \phi + \xi \sin \phi$ dans la catégorie $\mathscr{H}(X)$:

LEMME (4.15). *La matrice*

$$J'(\varepsilon, \eta, \phi) = \begin{pmatrix} -\varepsilon G(\varepsilon, \eta, \phi) & b_1 \sin \phi & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 \sin \phi & \varepsilon \cos \phi + a_2 \sin \phi & b_2 \sin \phi & 0 & \cdots \\ 0 & c_2 \sin \phi & -\varepsilon \cos \phi + a_3 \sin \phi & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

est un relèvement de l'homotopie $\tilde{\varepsilon}^{\vee} \cos \phi + J^{\vee}(\varepsilon, \eta) \sin \phi$ *dans la catégorie* $\mathscr{H}(X)$ *qui anticommute aux générateurs de* $C^{p,q}$. *On a en outre*

$$J'(\varepsilon, \eta, 0) = \tilde{\varepsilon}$$

$$J'(\varepsilon, \eta, \pi) = \begin{pmatrix} +\varepsilon \sum r_p \zeta^p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

où les nombres réels r_p *sont les coefficients de Fourier de la fonction périodique* $H(\theta)$ *définie par*

$$\begin{aligned} H(\theta) &= +1 && \textit{pour} \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi/2, \\ H(\theta) &= \cos 2\theta + i \sin 2\theta && \textit{pour} \ \pi/2 \leqq \theta \leqq \pi, \\ H(-\theta) &= \overline{H(\theta)}. \end{aligned}$$

LEMME (4.16). *La graduation de* $C^{p,q}$*-module* $\varepsilon \sum r_p \zeta^p$ *est homotope à* η.

Démonstration des lemmes. Si $\phi: S^1 \to C$ est une fonction numérique continue et si E est un espace vectoriel hermitien complexe, on définit une fonction continue

$$\phi_E: U(E) \to \operatorname{End} E$$

associée au couple (ϕ, E), $U(E)$ désignant le groupe unitaire de E, de la manière suivante: $\sum a_n e^{in\theta}$ étant le développement en série de Fourier de ϕ, on pose

$$\phi_E(\zeta) = \sum a_n \zeta^n \text{ (32)}$$

(les sommations étant toujours prises au sens de Cesàro). Si on munit E d'une base orthonormale, on voit aisément que $\phi_E: U(n) \to \mathrm{GL}(n, C)$ est l'unique extension de

$$\psi: \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ facteurs}} \to \mathrm{GL}(n, C),$$

(32) Cette méthode s'applique plus généralement au cas où on remplace End E par une C^*-algèbre A; $U(E)$ devient alors le groupe des éléments ζ de A tels que $\zeta\zeta^* = \zeta^*\zeta = 1$.

où $\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{Diag}(\phi(\lambda_1), \ldots, \phi(\lambda_n))$, qui satisfait à la propriété $\phi_E(M^{-1}\zeta M) = \phi_E(\zeta)$ pour toute matrice unitaire M. Si E est un espace vectoriel réel si $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$ (une telle fonction sera dite "pseudo-réelle"), le développement en série de Fourier est en fait réel. Bien entendu, l'application $\phi \mapsto \phi_E$ est une isométrie d'algèbres à élément unité. Pour démontrer le Lemme 4.15, il faut d'abord vérifier les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
[-\varepsilon G(\varepsilon, \eta, \phi)]^2 + b_1 c_1 \sin^2 \phi &= 1 \\
-\varepsilon G(\varepsilon, \eta, \phi) b_1 \sin \phi + b_1 \sin \phi(\varepsilon \cos \phi + a_2 \sin \phi) &= 0 \\
c_1 \sin \phi(-\varepsilon G(\varepsilon, \eta, \phi)) + (\varepsilon \cos \phi + a_2 \sin \phi) c_1 \sin \phi &= 0
\end{aligned}$$

avec $c_1 = b_1 = \sum \lambda_n \zeta^n$, $a_2 = -\varepsilon(\zeta - \zeta^{-1})/2$. D'après la discussion précédente, ϕ étant fixé, les endomorphismes b_1, c_1, εa_2 et $G(\varepsilon, \eta, \phi)$ sont respectivement associés aux fonctions pseudo-réelles de $e^{i\theta} \in S^1$:

$$\begin{aligned}
\dot{b}_1 = \dot{c}_1 &= (\cos \theta + |\cos \theta|)/2 \\
(\dot{\varepsilon a}_2) &= -i \sin \theta \\
\dot{G}(\varepsilon, \eta, \phi) &= G(\phi, \theta).
\end{aligned}$$

En notant que ε commute à $\zeta^n + \zeta^{-n}$ et anticommute à $\zeta^n - \zeta^{-n}$ (c'est à dire "anti-commute à i"), on est ramené à vérifier les relations suivantes laissées en exercice au lecteur

$$\begin{aligned}
\dot{G}(\varepsilon, \eta, \phi)\overline{\dot{G}}(\varepsilon, \eta, \phi) + \dot{b}_1 \dot{c}_1 \sin^2 \phi &= 1 \\
-\dot{G}(\varepsilon, \eta, \phi) \dot{b}_1 \sin \phi + \dot{b}_1 \sin \phi(\cos \phi + (\dot{\varepsilon a}_2) \sin \phi) &= 0 \\
-\dot{c}_1 \sin \phi \dot{G}(\varepsilon, \eta, \phi) + (\cos \phi + (\dot{\varepsilon a}_2) \sin \phi) \dot{c}_1 \sin \phi &= 0.
\end{aligned}$$

Pour $\phi = 0$, on a $G(\phi, \theta) = 1$; donc $G(\varepsilon, \eta, 0) = \mathrm{Id}$ et $J'(\varepsilon, \eta, 0) = \tilde{\varepsilon}$. Pour $\phi = \pi$, on a

$$\begin{aligned}
G(\phi, \theta) &= -1 && \text{pour} \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi/2 \\
&= \cos 2\theta + i \sin 2\theta && \text{pour } \pi/2 \leqq \theta \leqq \pi.
\end{aligned}$$

Par conséquent $G(\varepsilon, \eta, \pi) = \varepsilon(\sum r_p \zeta^p)$. Pour démontrer le Lemme 4.16, il faut vérifier que la fonction $H(\theta) = -G(\pi, \theta)$ est homotope à la fonction $e^{i\theta}$ *parmi les fonctions pseudo-réelles* de $e^{i\theta}$. Or il est clair qu'on peut déformer le chemin

$$\theta \mapsto H(\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi,$$

en conservant les extrémités, en le chemin $\theta \mapsto e^{i\theta}$: considérer par exemple l'homotopie

$$\begin{aligned}
H_t(\theta) &= 1 && \text{pour} \quad 0 \leqq \theta \leqq t\pi/2 \\
&= \cos\left(\frac{2\phi - t\pi}{2-t}\right) + i \sin\left(\frac{2\phi - t\pi}{2-t}\right) && \text{pour } t\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.16, donc du Théorème 4.14.

REMARQUE. Le Théorème 4.14 s'étend sans difficulté au cas localement compact (les groupes de Grothendieck étant alors les groupes à support compact). En effet, si X est localement compact et si $\mathscr{C}$ est une catégorie de Banach quelconque, on a une suite exacte scindée bien connue:

$$\begin{array}{l} 0 \to K^{p,q}(\dot{X}, \{x\}; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(\dot{X}; \mathscr{C}) \to K^{p,q}(\{x\}; \mathscr{C}) \to 0, \\ \quad\ \wr\wr \\ \quad K_c^{p,q}(X; \mathscr{C}) \end{array}$$

$\dot{X} = X \cup \{x\}$ étant le compactifié d'Alexandroff de X. Les homomorphismes S et $\partial^{p,q+1}$ étant compatibles avec cette suite exacte (pour $\mathscr{C} = \mathscr{E}$ ou $\mathscr{H}^{\vee}$), le Théorème 4.14 dans le cas localement compact se déduit du méme théorème dans le cas compact.

APPENDICE 1. *Indice de familles d'opérateurs de Fredholm réels auto-adjoints.* Dans [24] G. Ruget à posé la question suivante: A quelle condition l'indice de telles familles est-il nul? Avec les notations de cet article, cette question peut être reformulée de la manière suivante: pour quel espace X l'application

$$[X, \tilde{\mathscr{F}}^1(H)] \to [X, \mathscr{F}(H)]$$

induite par l'injection naturelle de $\tilde{\mathscr{F}}^1(H)$ dans $\mathscr{F}(H)$ est-elle nulle? En fait Ruget a montré que pour $X = S^1$ cette application n'est pas triviale. Le but de cet Appendice est de démontrer le théorème suivant qui répond entièrement à la question de Ruget:

THEOREME (A1). *Pour qu'un élément x de $KO(X) \approx [X, \mathscr{F}(H)]$ soit l'indice d'une famille d'opérateurs de Fredholm auto-adjoints, il faut et il suffit que $\varepsilon_u(x) = 0$, ε_u désignent l'homomorphisme de complexification*

$$KO(X) \to KU(X).$$

Démonstration. D'après les identifications

$$[X, \tilde{\mathscr{F}}^1(H)] \approx \bar{K}^{1,0}(X) \approx K^{1,1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \approx K^{1,0}(X; \mathscr{E})$$

et

$$[X, \mathscr{F}(H)] \approx \bar{K}^{0,0}(X) \approx K^{0,1}(X; \mathscr{H}^{\vee}) \approx K^{0,0}(X; \mathscr{E}),$$

on voit aussitôt que l'homomorphisme $[X, \mathscr{F}^1(H)] \to [X, \mathscr{F}(H)]$ correspond, modulo ces identifications, à l'homomorphisme

$$\eta: KO^1(X) = K^{1,0}(X; \mathscr{E}) \to K^{0,0}(X; \mathscr{E}) = KO(X)$$

défini par $\eta(d(E; \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = d(E'; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, E' étant le $C^{0,0}$-module sous-jacent à E. Mais, d'après [12, Proposition 3.4.20], on a la suite exacte

$$KU^{-1}(X) \longrightarrow KO^1(X) \xrightarrow{\eta} KO(X) \xrightarrow{\varepsilon_u} KU(X),$$

ce qui démontre évidemment le théorème.

REMARQUE. On démontrerait de même le résultat analogue suivant: pour que x soit l'indice d'une famille d'opérateurs de Fredholm auto-adjoints et antilinéaires (pour une certaine structure complexe de H), il faut et il suffit que $\varepsilon_C(x)=0$. Ici ε_C désigne l'homomorphisme canonique $KO(X) \to KC(X)$ défini par Anderson (c'est l'homomorphisme induit par l'inclusion de X dans $X \times S^{2,0}$ avec les notations de [2]).

APPENDICE 2. *Multiplication sur les espaces* $\mathscr{F}^{p,q}$(33).

On a défini dans [13] une multiplication

$$\psi\colon \bar{K}^{p,q}(X) \times \bar{K}^{p,q}(Y) \to \bar{K}^{p+p',q+q'}(X \times Y).$$

En faite, celle-ci est induite par l'application

$$\psi\colon \mathscr{F}^{p,q}(H) \times \mathscr{F}^{p',q'}(H') \to \mathscr{F}^{p+p',q+q'}(H \hat{\otimes} H')$$

définie par $\psi(D, D') = D \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} D'$. Si on identifie les trois espaces de Hilbert H, H' et $H \otimes H'$, on trouve une application

$$\mathscr{F}^{p,q} \times \mathscr{F}^{p',q'} \to \mathscr{F}^{p+p',q+q'},$$

dont la classe d'homotopie ne dépend pas du choix des identifications d'après le théorème de Kuiper. On définit ainsi sur la somme $\bigcup \mathscr{F}^{p,q}$ une structure d'anneau à homotopie près. Le seul point qui est peut-être à éclaircir est la construction de "l'opposé pour l'addition." En effet, H étant un $C^{p,q+1}$-module infini, il est isomorphe à $\bar{H}$ par un isomorphisme $c\colon H \to \bar{H}$. Si $D \in \mathscr{F}^{p,q}(H)$, on définit alors "$-D$" comme $+c^{-1} \cdot D' \cdot c$, où $D'\colon \bar{H} \to \bar{H}$ est tel que $D'(x) = -D(x)$ $\forall x \in \bar{H}$ identifié à H comme espace vectoriel réel sous-jacent. On vérifie sans peine les axiomes des anneaux. Enfin, on peut, comme dans [13], définir une "multiplication tordue"

$$\dot{\psi}\colon \mathscr{F}^{n} \times \mathscr{F}^{n'} \to \mathscr{F}^{n+n'}$$

pour n et n' de signe quelconque (on pose $\mathscr{F}^n = \mathscr{F}^{p,q}$ pour $n = p-q$), par la formule

$$\dot{\psi}(D, D') = (-1)^{qp'}\psi(D, D')$$

si $D \in \mathscr{F}^{p,q} = \mathscr{F}^n$ et $D' \in \mathscr{F}^{p',q'} = \mathscr{F}^{n}$. La multiplication $\dot{\psi}$ est alors commutative (au sens gradué).

APPENDICE 3. *Extension aux C^*-algèbres.* A l'aide des idées de [16], les résultats énoncés ici se généralisent sans peine aux C^*-algèbres. Indiquons succintement comment ceci peut se faire (nous reviendrons sur les aspects théoriques de cette question dans une publication ultérieure). Soit donc A une C^*-algèbre réelle ou complexe plongée dans la C^*-algèbre $\mathrm{End}_{\mathscr{H}}(H)$. Si on pose $H' = H \oplus H \oplus \cdots$, un endomorphisme de H' sera dit A-permutant s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H', par une matrice infinie (a_{ji}), où $a_{ji} \in A$ et où, dans chaque ligne et chaque colonne, il y a au plus un élément non nul. Par définition, le "*cone*" CA de A est la plus petite C^*-algèbre contenue dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}}(H')$ et contenant les endomorphismes A-permutants. Soit $\mathscr{I}$ le plus petit idéal fermé de CA contenant

(33) L'existence d'une telle multiplication m'a été signalée par Atiyah et Singer.

les matrices permutantes (a_{ji}) telles que $a_{ji}=0$, sauf pour un nombre fini de couples (i,j). Par définition, la "*suspension*" SA de A est la C^*-algebre quotient $CA/\mathscr{I}$ (cf. [16]). Les méthodes développées dans cet article s'étendent alors trivialement dans ce contexte (remplacer $\mathscr{E}$ par $\mathscr{L}(A)$, $\mathscr{H}$ par $\mathscr{L}(CA)$, $\mathscr{H}^{\vee}$ par $\mathscr{L}(SA)$). Pour X compact, on obtient en particulier un isomorphisme S de $K^{p,q}(X;A)$ sur

$$K^{p,q+1}(X;SA)$$

qui s'exprime lui aussi à l'aide de matrices de Jacobi. Ceci implique évidemment que $\text{inj}\lim_n \pi_i(\text{GL}(A,n))\approx \text{inj}\lim_n \pi_{i+1}(\text{GL}(SA,n))$, ce qui justifie la terminologie (cf. [12, Proposition 2.3.8]). En utilisant la catégorie $\mathscr{L}(\mathscr{I}^+)$, où $\mathscr{I}^+$ désigne l'algèbre $\mathscr{I}$ augmentée d'un élément unité, il est facile de voir que les foncteurs $K^n(X,Y;SA)$ forment une théorie de la cohomologie (X paracompact, Y fermé dans X).

APPENDICE 4. En utilisant de manière plus intensive les idées du §4 et celles de l'Appendice précédent nous allons voir rapidement comment on peut démontrer d'une autre manière la conjecture d'Atiyah-Singer (sans utiliser le Théorème 2.2.2 de [12]), ceci fournit aussi une $(n+1)^e$-méthode pour démontrer les théorèmes de périodicité de Bott classiques. La discussion va reposer essentiellement sur le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
K_c^{p,q+1}(X;\mathscr{E}) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "t"'] & K^{p,q+2}(X;A) \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "t_A"'] \arrow[dl, "k^{-1}\cdot\partial"'] & K_c^{p,q+3}(X;SA) \arrow[d, "t_{SA}"] \arrow[dl, "k_A^{-1}\cdot\partial_A"'] \\
K_c^{p,q}(X\times \boldsymbol{R};\mathscr{E}) \arrow[r, "S_1"] \arrow[d, "t_1"'] & K_c^{p,q+1}(X\times \boldsymbol{R};A) \arrow[r, "S_{1A}"] \arrow[d, "t_{1A}"'] \arrow[dl, "k_1^{-1}\cdot\partial_1"'] & K_c^{p,q+2}(X\times \boldsymbol{R};SA) \arrow[d, "t_{1SA}"] \arrow[dl, "k_{1A}^{-1}\cdot\partial_{1A}"'] \\
K_c^{p,q-1}(X\times \boldsymbol{R}^2;\mathscr{E}) \arrow[r, "S_2"] & K_c^{p,q}(X\times \boldsymbol{R}^2;A) \arrow[r, "S_{2A}"] & K_c^{p,q+1}(X\times \boldsymbol{R}^2;SA).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme t, t_A, t_{SA}, t_1, t_{1A}, t_{1SA} sont des cas particuliers de l'homomorphisme fondamental t défini dans [12]. Les homomorphismes $k^{-1}\cdot\partial$ et $k_1^{-1}\cdot\partial_1$ sont des cas particuliers d'un isomorphisme élémentaire défini dans [13]. Les homomorphismes $k_A^{-1}\cdot\partial_A$ et $k_{1A}^{-1}\cdot\partial_{1A}$ en sont des généralisations immédiates (pour A C^*-algèbre quelconque; ici $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ plongée implicitement dans l'espace des endomorphismes d'un Hilbert). Les diagrammes obliques construits avec les S et les $k^{-1}\cdot\partial$ sont anticommutatifs. Si on pose $t'=-k^{-1}\,\partial S_1$ et $t'_A=-k^{-1}\,\partial_A S_{1A}$, on voit donc que $tt'=1$ et $t_At'_A=1$ en utilisant le Théorème 4.14 et sa généralisation aux C^*-algèbres esquissée dans l'Appendice précédent. Grâce au formalisme de [4], il en résulte que $t't=1$ et $t'_At_A=1$ si X est une sphère S^n, $n\geqq 1$. En utilisant un théorème classique sur les foncteurs semi-exacts du à Dold, il suffit donc de vérifier que t et t_A sont injectifs pour X réduit à un point, ce qui peut se faire par inspection directe (noter que S_1 est un isomorphisme si t en est un).

COROLLAIRE. *L'homomorphisme S est un isomorphisme (conjecture d'Atiyah-Singer) et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K_c^{p,q+1}(X;\mathscr{E}) & \xrightarrow{S} & K_c^{p,q+2}(X;A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle t} & & \Big\downarrow{\scriptstyle A} \\ K_c^{p,q}(X\times \boldsymbol{R};\mathscr{E}) & \xrightarrow{S_1} & K^{p,q+1}(X;A) \end{array}$$

est anticommutatif.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology **3** (1964), 3–38.
2. M. F. Atiyah, *K-theory and reality*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **17** (1966), 367–386.
3. ———, *K-theory* (Appendix), Benjamin, New York, 1966.
4. ———, *Bott periodicity and elliptic operators*, Quart. J. Math. Oxford (2) **19** (1968), 113–140.
5. R. Bott, *The stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 313–337.
6. L. Illusie, *Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie*, Séminaire Bourbaki, Exposé 1964/65, 284.
7. ———, *Complexes quasi-acycliques directs de fibrés banachiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6499–6502.
8. K. Jänich, *Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren*, Math. Ann. **161** (1965), 129–142.
9. M. Karoubi, *Fondements de la K-théorie* (Notes de séminaire), Faculté des Sciences, Departement de Mathématique, Alger, 1966.
10. ———, *Cohomologie des catégories de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris **263** (1966), 275–278.
11. ———, *Cohomologie des catégories de Banach: applications*, C. R. Acad. Sci. Paris **263** (1966), 341–344.
12. ———, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **1** (1968), 161–270.
13. ———, *Algèbres de Clifford et opérateurs de Fredholm*, C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1968), 305–308.
14. ———, *Foncteurs dérivés et K-théorie*, C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1968), 328–331, 345–348.
15. ———, *Algèbres de Clifford et opérateurs de Fredholm* (démonstrations de [13] à paraître au séminaire Heidelberg-Saarbrück-Strasbourg 1967/68).
16. ———, *Foncteurs dérivés et K-théorie* (démonstrations de [14] à paraître au séminaire Heidelberg-Saarbrück-Strasbourg 1967/68).
17. ———, *K-théorie équivariante des fibrés en sphères* (à paraître).
18. N. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology **3** (1965), 19–30.
19. S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds* (Appendix), Interscience, New York, 1962.
20. E. Michael, *Convex structures and continuous selections*, Canad. J. Math. **11** (1959), 571. (Voir aussi R. Bartle et L. M. Graves, *Mappings between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 400–413.)
21. J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a* CW *complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 272–280.
22. ———, *On axiomatic homology theory*, Pacific J. Math. **12** (1962), 337–341.

23. R. S. Palais, *On the homotopy type of certain groups of operators*, Topology **3** (1965), 271–279.

24. G. Ruget, *Une remarque sur l'indice d'une famille d'opérateurs auto-adjoints*, C. R. Acad. Sci. Paris **266** (1968), 466.

25. M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1932.

26. J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245, 453–496.

27. R. Wood, *Banach algebras and Bott periodicity*, Topology **4** (1965/66), 371–389.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, NEW JERSEY