

ALGÈBRES DE CLIFFORD ET OPÉRATEURS DE FREDHOLM

Max Karoubi

Extension du théorème de Jänich  $K^0(X) \approx [X, \mathcal{F}(H)]$  aux groupes  $K^q(X)$ .  
 Application aux structures multiplicatives en K-théorie.

1. LE GROUPE  $\bar{K}^{p,q}(X)$  <sup>(1)</sup>. — Soient  $X$  un espace compact et  $C^{p,q}$  l'algèbre de Clifford de  $\mathbb{R}^{p+q}$  muni de la forme quadratique

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$$

[cf. <sup>(2)</sup> ou <sup>(3)</sup> dont nous suivrons les notations]. Soit  $E$  un fibré hilbertien muni d'une structure de  $C^{p,q}$ -module gradué compatible avec sa métrique. On appellera *quasi-gradation* de  $E$  une famille continue d'opérateurs de Fredholm  $D = (D_x)$ ,  $D_x : E_x \rightarrow E_x$ , autoadjoints, de degré un et anti-commutant aux générateurs de l'algèbre de Clifford  $C^{p,q}$ . On désigne par  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des classes d'homotopie de telles paires  $(E, D)$ . C'est de manière évidente un monoïde abélien pour le somme de Whitney des fibrés. Un élément  $(E, D)$  de  $\mathcal{Q}$  est dit *acyclique* si  $D$  est une famille continue d'opérateurs inversibles. On désigne par  $\bar{K}^{p,q}(X)$  le monoïde quotient de  $\mathcal{Q}$  par la relation d'équivalence suivante :  $\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists \tau$  et  $\tau'$  acycliques telles que  $\sigma + \tau = \sigma' + \tau'$ . En fait,  $\bar{K}^{p,q}(X)$  est un groupe, la paire opposée à  $(E, D)$  étant la paire  $(\bar{E}, -D)$  où  $\bar{E}$  est le  $C^{p,q}$ -module « conjugué » de  $E$ . En appliquant un théorème de Kuiper <sup>(4)</sup>, on voit aisément que le groupe  $\bar{K}^{0,0}(X)$  est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie de  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{F}(H)$  des opérateurs de Fredholm d'un espace de Hilbert de dimension infinie  $H$ . D'après le théorème classique de Jänich <sup>(1)</sup>, on a donc  $\bar{K}^{0,0}(X) \approx K(X)$ . On se propose d'explicitier ici un isomorphisme plus général entre  $\bar{K}^{p,q}(X)$  et le groupe  $K^{p,q}(X)$  [ou  $K^{p-q}(X)$ ] introduit dans <sup>(5)</sup>.

2. L'ISOMORPHISME  $j : \bar{K}^{p,q}(X) \rightarrow K^{p,q}(X)$ . — On désigne par  $\mathcal{H}(X)$  la catégorie de Banach des fibrés hilbertiens et par  $\check{\mathcal{H}}(X)$  la catégorie de Banach associée à la catégorie prébanachique  $\mathcal{H}'(X)$  suivante : les objets de  $\mathcal{H}'(X)$  sont les fibrés hilbertiens,

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}'(X)}(E, F) = \text{Hom}_{\mathcal{H}(X)}(E, F) / \mathcal{K}(E, F),$$

où  $\mathcal{K}(E, F)$  désigne l'ensemble des morphismes  $f: E \rightarrow F$  tels que  $f_x: E_x \rightarrow F_x$  soit complètement continu (i. e. limite d'opérateurs de rang fini). On désigne par  $\varphi$  ou  $\checkmark$  le foncteur canonique de  $\mathcal{H}(X)$  dans  $\check{\mathcal{H}}(X)$ .

Notons maintenant  $\sigma$  l'application canonique de  $\mathfrak{F}$  dans  $\overline{K}^{p,q}(X)$  et considérons un élément  $x = \sigma(E, D)$  de  $\overline{K}^{p,q}(X)$ . Alors  $E$  peut être aussi regardé comme un  $C^{p,q+1}$ -module,  $D$  anticommuntant aux générateurs de  $C^{p,q+1}$ .

LEMME 1. — *Il existe une paire acyclique  $(F, \Delta)$  et une graduation  $\varepsilon_1$  du  $C^{p,q+1}$ -module  $E \oplus F$ :*

D'après ce lemme, on peut donc supposer que  $x = \sigma(E, D)$  où  $E$  est un  $C^{p,q+1}$ -module gradué de graduation  $\varepsilon_1$ . D'autre part,  $D$  étant une famille d'opérateurs de Fredholm autoadjoints, le spectre de  $\check{D}$  ne rencontre pas l'axe imaginaire. Soit alors  $\gamma^-$  (resp.  $\gamma^+$ ) une courbe fermée différentiable symétrique par rapport à l'axe réel et contenant le spectre de  $\check{D}$  situé à gauche (resp. à droite) de l'axe imaginaire. L'endomorphisme

$$\varepsilon'_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{1z - \check{D}} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^-} \frac{dz}{1z - \check{D}}$$

est une graduation de  $\check{E}$  dans la catégorie  $\check{\mathcal{H}}(X)$  qui anticommute aux générateurs de l'algèbre de Clifford  $C^{p,q+1}$ . On définit ainsi un homomorphisme

$$u: \overline{K}^{p,q}(X) \rightarrow K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X))$$

par la formule  $u(\sigma(E, D)) = d(E, \varepsilon'_1, \varepsilon_1)$  avec  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$ .

PROPOSITION 2. — *L'homomorphisme  $u$  est un isomorphisme.*

LEMME 3. — *Le groupe  $K^{p,q}$  de la catégorie  $\mathcal{H}(X)$  est nul.*

En effet, soit  $d(F, \eta_1, \eta_2)$  un élément de  $K^{p,q}(\mathcal{H}(X))$  et soit  $G$  la somme hilbertienne  $F \oplus F \oplus \dots$ . Alors  $G$  peut être muni des graduations  $\xi_i = \eta_i \oplus \eta_i \oplus \dots$ ,  $i = 1, 2$ , et on a de manière évidente

$$d(F, \eta_1, \eta_2) + d(G, \xi_1, \xi_2) = d(G, \xi_1, \xi_2),$$

d'où  $d(F, \eta_1, \eta_2) = 0$ .

COROLLAIRE 4. — *L'homomorphisme cobord  $\partial^{p,q+1}$  de la suite exacte de cohomologie associée au foncteur  $\varphi$  définit un isomorphisme entre les groupes  $K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X))$  et  $K^{p,q}(\varphi)$ .*

Cette suite exacte s'écrit en effet

$$\begin{array}{ccccccc} K^{p,q+1}(\mathcal{H}(X)) & \rightarrow & K^{p,q+1}(\check{\mathcal{H}}(X)) & \xrightarrow{\partial^{p,q+1}} & K^{p,q}(\varphi) & \rightarrow & K^{p,q}(\mathcal{H}(X)). \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Considérons maintenant un élément  $d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $K^{p,q}(X)$ . Le fibré vectoriel en  $C^{p,q}$ -modules de dimension finie  $E$  peut être vu comme un

objet de  $(\mathcal{H}(X))^{p,q}$ . Puisque  $\xi_1 = \xi_2$ , le triple  $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  définit de manière évidente un élément de  $K^{p,q}(\varphi)$ , d'où un homomorphisme  $k$  de  $K^{p,q}(X)$  dans  $K^{p,q}(\varphi)$ .

PROPOSITION 5. — *L'homomorphisme  $k$  est un isomorphisme.*

La proposition 2, le corollaire 4 et la proposition précédente impliquent enfin le théorème que nous avons en vue :

THÉORÈME 6. — *L'homomorphisme composé*

$$j = k^{-1} \cdot d^{p,q-t} \cdot u : \bar{K}^{p,q}(X) \rightarrow K^{p,q}(X)$$

*est un isomorphisme.*

3. EXTENSIONS DIVERSES. — Soit  $V$  un fibré vectoriel réel sur  $X$  muni d'une forme quadratique non dégénérée  $Q$ . En suivant (<sup>2</sup>), on définit un groupe  $\bar{K}$  « tordu », noté  $\bar{K}^V(X)$ , dont on montre de manière analogue qu'il est isomorphe au groupe  $K^V(X)$ . Cette définition est encore valable si  $X$  est localement compact à condition de considérer des paires  $(E, D)$  où  $D$  est « acyclique à l'infini ».

4. STRUCTURES MULTIPLICATIVES. — Soit  $x = \sigma(E, D)$  [resp.  $x' = \sigma(E', D')$ ] un élément de  $\bar{K}^V(X)$  [resp.  $\bar{K}^V(X')$ ]. On définit leur « cup-produit »  $x \cup x'$  appartenant à  $\bar{K}^{V \oplus V}(X \times X')$  par la formule

$$\sigma(E, D) \cup \sigma(E', D') = \sigma(E \hat{\otimes} E', D \hat{\otimes}_{i+1} \hat{\otimes} D').$$

Dans cette formule  $E \hat{\otimes} E'$  représente le produit tensoriel *gradué complété* des fibrés  $E$  et  $E'$  fibre par fibre : c'est un  $C(V \oplus V')$ -module de manière évidente [identifier  $C(V) \hat{\otimes} C(V')$  à  $C(V \oplus V')$ ].

PROPOSITION 7. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{K}^{0,0}(X) \times \bar{K}^{0,0}(X') & \xrightarrow{\cup} & \bar{K}^{0,0}(X \times X') \\ i \times j \downarrow & & \downarrow j \\ K^{0,0}(X) \times K^{0,0}(X') & \xrightarrow{\cup} & K^{0,0}(X \times X') \end{array}$$

*la deuxième flèche horizontale représentant le cup-produit usuel.*

Supposons que le fibré  $V$  s'écrive  $V^- \oplus V^+$ ,  $V^-$  et  $V^+$  étant orthogonaux pour la forme quadratique  $Q$  et la restriction de  $Q$  à  $V^+$  étant définie positive. Considérons ensuite un élément  $\sigma(E, D)$  de  $\bar{K}^V(X) = \bar{K}^{V^- \oplus V^+}(X)$  et désignons par  $E'$  le  $C(V^-)$ -module obtenu à partir de  $E$  par restriction des scalaires. Si on note  $\pi : V^+ \rightarrow X$  la projection canonique, on définit une quasi-gradation  $D'$  de  $\pi^* E'$ , acyclique en dehors de la section nulle de  $V^+$ , égale au point  $\nu^+$  de  $V^+$  à la somme  $\varphi(\nu^+) + D_{\pi, \nu^+}$  (en abrégé  $\nu^+ + D$ ) où  $\varphi : C(V^+) \rightarrow \text{End } E$  est l'homomorphisme définissant la structure de  $C(V^+)$ -module de  $E$  (par restriction des scalaires). Posons

$$\bar{i}(\sigma(E, D)) = \sigma(E', D').$$

THÉORÈME 8. — *L'homomorphisme*

$$\bar{i}: \bar{K}^{v-\oplus v^+}(X) \rightarrow \bar{K}^{\pi \cdot v^-}(V^+)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 9. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{K}^{v-\oplus v^+}(X) \times \bar{K}^{v'-\oplus v'^+}(X') & \xrightarrow{\cup} & \bar{K}^{(v-\oplus v')-\oplus(v^+\oplus v'^+)}(X \times X') \\ \bar{i} \times \bar{i} \downarrow & & \downarrow \bar{i} \\ \bar{K}^{\pi \cdot v^-}(V^+) \times \bar{K}^{\pi' \cdot v'^-}(V'^+) & \xrightarrow{\cup} & \bar{K}^{\pi \cdot (v-\oplus v')^-}(V^+ \oplus V'^+) \end{array}$$

où  $\pi: V^+ \rightarrow X$ ,  $\pi': V'^+ \rightarrow X'$ ,  $\pi'': V^+ \oplus V'^+ \rightarrow X \times X'$ .

Les considérations précédentes permettent de définir une application bilinéaire

$$\cup: \bar{K}^{p,q}(X) \times \bar{K}^{p',q'}(X') \rightarrow \bar{K}^{p+p',q+q'}(X \times X').$$

Si  $x \in \bar{K}^{p,q}(X)$  et  $x' \in \bar{K}^{p',q'}(X')$ , posons

$$x \dot{\cup} x' = (-1)^{q p'} x \cup x'.$$

PROPOSITION 10. — *Avec les notations précédentes on a*

$$x' \dot{\cup} x = (-1)^{(p-q)(p'-q')} T^*(x \dot{\cup} x'),$$

où  $T: X' \times X \rightarrow X \times X'$  désigne l'homéomorphisme canonique.

Cette proposition définit sans ambiguïté un cup-produit  $\dot{\cup}$  sur les groupes  $\bar{K}^n \approx \bar{K}^{p,q}$  lorsque  $p - q = n$ . On obtient ainsi, pour  $n$  et  $n'$  de signe quelconque, une application bilinéaire

$$\bar{K}^n(X) \times \bar{K}^{n'}(X') \rightarrow \bar{K}^{n+n'}(X \times X')$$

qui fait de la  $K$ -théorie une théorie cohomologique multiplicative et périodique (comparer avec (2)).

(\*) Séance du 5 août 1968.

(1) L'idée du groupe  $\bar{K}^{p,q}(X)$  m'a été suggérée par Atiyah et Singer (2).

(2) M. F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, *Vector bundles and homogeneous spaces (Proc. Symposium in pure Math., 3, American Mathematical Society, 1961)*.

(3) M. F. ATIYAH et I. M. SINGER (à paraître).

(4) K. JÄNICH, *Bonn Dissertation*, 1964.

(5) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 275 et 341.

(6) M. KAROUBI, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 1, 1968, p. 161.

(7) N. H. KUIPER, *The homology type of the unitary group of Hilbert space, Topology*, 1965, p. 19-30.

(Institut de Recherche mathématique avancée, rue René-Descartes, Strasbourg, Bas-Rhin.)