Formes modulaires: Examen janvier 2012, corrigé

A NOTER: quelques oublis dans l'énoncé de IV.2. ont été corrigés.

I. Soit N un entier positif. Soit

$$K(N) = \{g \in GL(2,\hat{\mathbb{Z}}) = \prod_p GL(2,\mathbb{Z}_p) \mid g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N\}.$$

On pose $GL(2,\mathbb{R})_+ \subset GL(2,\mathbb{R})$ le sous-groupe d'éléments de déterminant positif, $GL(2,\mathbb{Q})_+ = GL(2,\mathbb{R})_+ \cap GL(2,\mathbb{Q})$, $GL(2,\mathbf{A})_+ = GL(2,\mathbb{R})_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)$, où comme d'habitude on définit $GL(2,\mathbf{A}_f)$ comme le groupe d'adèles de composante réelle triviale. Soit

$$S(N) = GL(2,\mathbb{Q})_+ \backslash GL(2,\mathbf{A})_+ / \mathbb{R}^\times \cdot SO(2) \times K(N).$$

Ici $\mathbb{R}^\times \cdot SO(2) \subset GL(2,\mathbb{R})_+$ est le sous-groupe de matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, de sorte que $GL(2,\mathbb{R})_+/\mathbb{R}^\times \cdot SO(2)$ s'identifie au démi-plan supérieur $\mathfrak{H}$ par l'application $g \mapsto g(i)$.

Montrer que $S(N)$ s'identifie à une réunion finie de quotients de $\mathfrak{H}$ par des sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Z})$ agissant de façon proprement discontinue, et déterminer le nombre de composantes connexes de $S(N)$.

SOLUTION: C'est une application du théorème d'approximation forte pour $SL(2)$. Nous savons que $SL(2,\mathbb{Q}) \cdot SL(2,\mathbb{R})$ est dense dans $SL(2,\mathbf{A})$. Ceci implique que $SL(2,\mathbb{Q})$ est dense dans $SL(2,\mathbf{A}_f)$, et donc que $SL(2,\mathbf{A}_f) = SL(2,\mathbb{Q}) \cdot K(N)_1$, où $K(N)_1 = K(N) \cap SL(2,\mathbf{A}_f)$.

Comme $GL(2,\mathbb{R})_+/\mathbb{R}^\times \cdot SO(2)$ s'identifie au demi-plan supérieur $\mathfrak{H}$, on peut identifier

$$S(N) = GL(2,\mathbb{Q})_+ \backslash \mathfrak{H} \times GL(2,\mathbf{A}_f)/K(N).$$

Comme $\mathfrak{H}$ est un espace connexe, l'ensemble $\pi_0(S(N))$ des composantes connexes de $S(N)$ est en bijection avec $GL(2,\mathbb{Q})_+ \backslash GL(2,\mathbf{A}_f)/K(N)$. Le déterminant $GL(2,\mathbf{A}_f) \to {\mathbf{A}_f}^\times$ identifie cet ensemble avec ${\mathbf{A}_f}^\times/(\mathbb{Q}_+^\times \cdot (1 + N(\hat{\mathbb{Z}}))$, où $\mathbb{Q}_+^\times$ est le groupe multiplicatif des nombres rationnels positifs. Or nous avons vu que l'application naturelle

$$\mathbb{Q}_+^\times \times \mathbb{R}^\times \times \hat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbf{A}^\times$$

est une bijection. On en déduit qu'il y a une une bijection

$${\mathbf{A}_f}^\times/(\mathbb{Q}_+^\times \cdot (1 + N(\hat{\mathbb{Z}})) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^\times/(1 + N(\hat{\mathbb{Z}}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times.$$

Il y a donc $\phi(N)$ composantes connexes, où ϕ est la fonction d'Euler.

Par le même raisonnement, on trouve qu'il existe un ensemble $\gamma_i, i = 1, \ldots \phi(N)$ dans $GL(2,\mathbf{A}_f)$ tel que

$$GL(2,\mathbf{A})_+ = \coprod_i GL(2,\mathbb{Q})_+ \cdot [GL(2,\mathbb{R})_+ \cdot \gamma_i \cdot K(N)].$$

On peut choisir les γ_i de sorte que les $\{\det(\gamma_i)\}$ forme un ensemble de représentants de classes de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, donc on peut prendre $\gamma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ où les a_i parcourt $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Or pour chaque i,

$$GL(2,\mathbb{Q})_+\backslash GL(2,\mathbb{Q})_+ \cdot [GL(2,\mathbb{R})_+ \cdot \gamma_i \cdot K(N)]/\mathbb{R}^\times \cdot SO(2) \times K(N)$$

est en bijection avec $\Gamma_i\backslash\mathfrak{H}$, où

$$\Gamma_i = \{\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})_+ \mid \alpha \cdot \gamma_i \in \gamma_i K(N)\} = SL(2,\mathbb{Z}) \cap \gamma_i K(N)\gamma_i^{-1}.$$

Comme $K(N)$ est un sous-groupe invariant de $GL(2,\hat{\mathbb{Z}})$, on voit facilement que $\Gamma_i = \Gamma(N)$ pour chaque i. En particulier

$$S(N) = \coprod_{i\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}.$$

On sait que $\Gamma(N)$ agit de façon proprement discontinue sur $\mathfrak{H}$.

II. Soit f une forme cuspidale de poids μ pour $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$. On définit une fonction $F \in C^\infty(\Gamma\backslash G_+)$, $G_+ = GL(2,\mathbb{R})_+$, par

$$F(g) = det(g)^{\frac{\mu}{2}} f(g(i)) j(g,i)^{-\mu}$$

où $j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d$. Enfin, on définit $\phi \in C^\infty(G(\mathbb{Q})_+\backslash G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f))$, $G(\mathbb{Q})_+ = GL(2,\mathbb{Q}) \cap G_+$, par

$$\phi(\gamma \cdot (g_\infty, k_f)) = F(g_\infty), \gamma \in G(\mathbb{Q})_+, k_f \in GL(2,\hat{\mathbb{Z}}).$$

0. Montrer que

$$C^\infty(G(\mathbb{Q})_+\backslash G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)) = C^\infty(GL(2,\mathbb{Q})\backslash GL(2,\mathbf{A})).$$

SOLUTION: Il suffit d'observer que $GL(2,\mathbf{A}) = G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f) \coprod \alpha G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)$ où $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Q})$.

1. Montrer que la formule donnée pour ϕ définit effectivement une fonction sur $G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)$ invariante à gauche sous $G(\mathbb{Q})_+ \cdot \mathbb{R}^\times$ où $\mathbb{R}^\times \subset G_+$ par l'inclusion $r \mapsto \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

SOLUTION: Un calcul facile. Je note que le choix $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ implique que μ est pair (ou que $f = 0$).

2. Soit $Z(\mathbf{A}) \subset GL(2,\mathbf{A})$ le sous-groupe des éléments diagonaux. Montrer qu'il existe un caractère $\omega : Z(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\phi(zg) = \omega(z)\phi(g)$ pour tout $g \in G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)$ et tout $z \in Z(\mathbf{A})$, et déterminer ω.

SOLUTION: On a déjà vu que l'application naturelle

$$\mathbb{Q}_+^\times \times \mathbb{R}^\times \times \hat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbf{A}^\times$$

est une bijection. D'après la question 1 on sait que $\phi(zg) = \phi(g)$ pour tout $z \in [G(\mathbb{Q})_+ \cdot \mathbb{R}^\times] \cap Z(\mathbf{A})$. D'autre part, comme ϕ ne dépend pas de la variable k_f, on sait que, pour $z_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(\mathbf{A}) \cap GL(2, \hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^\times$, on a $\phi(z_f g) = \phi(g z_f) = \phi(g)$ pour tout g, où la première égalité est vérifiée parce que les éléments de $Z(\mathbf{A})$ commutent avec tous les éléments de $G(\mathbf{A})$. Donc l'égalité $\phi(zg) = \omega(z)\phi(g)$ est vrai avec le caractère $\omega \equiv 1$.

3. Soit p un nombre premier et soit $T \in C_c^\infty(GL(2, \mathbb{Q}_p))$ la fonction caractéristique de la double classe $GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p) \subset GL(2, \mathbb{Q}_p)$. Pour tout $\psi \in L_2(G(\mathbb{Q})_+ \backslash [G_+ \times GL(2, \mathbf{A}_f)])$ on définit

$$T(\psi)(g) = \int_{GL(2,\mathbb{Q}_p)} T(h)\psi(gh)dh.$$

Montrer que l'opérateur T est auto-adjoint pour le produit scalaire L_2.

SOLUTION: Comme la mesure dh est invariante à droite et à gauche par l'acton de $GL(2, \mathbb{Q}_p)$, on voit que

$$< T(\psi), \psi' >= \int_{GL(2,\mathbb{Q}_p)} T(h)\psi(gh)\bar{\psi}'(g)dh = \int_{GL(2,\mathbb{Q}_p)} T(h)\psi(g)\bar{\psi}'(gh^{-1})dh =< \psi, T^*(\psi') >$$

où T^* est la fonction caractéristique de la double classe $GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p)$. (Comme les valeurs de T sont réelles, elle passe en dessous la conjugaison complexe.) On voit facilement que

$$GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p) = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \cdot GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p)$$

et on sait par le théorème des diviseurs élémentaires que que

$$GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p) = GL(2, \mathbb{Z}_p) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} GL(2, \mathbb{Z}_p).$$

Donc

$$T^*(\psi')(g) = T(\psi')(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \cdot g) = \omega(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix})T(\psi')(g).$$

Comme $\omega \equiv 1$, cela montre que $T = T^*$. Peut-être j'aurais dû préciser que le produit scalaire L_2 était sur l'espace de fonctions construites à partir de formes modulaires de poids μ et de niveau 1; mais on peut voir facilement que $< T(\psi), \psi' >= 0$ si ψ' n'est pas invariant sous $Z(\mathbf{A})$.

4. Quelle est la relation entre $T(\phi)$ et $f|_\mu T(p)$ où $T(p)$ est l'opérateur de Hecke classique?

SOLUTION: Evidemment $T(\phi)$ est à peu près la même chose que la fonction sur $GL(2, \mathbf{A})$ construite à partir de $f|_\mu T(p)$, mais la relation précise dépend de la normalisation choisie pour l 'opérateur $T(p)$. C'était à l'étudiant de choisir une normalisation qui donnait le bon résultat.

III. Donner un exemple d'une forme automorphe ϕ sur $GL(2,\mathbb{Q})\backslash GL(2,\mathbf{A})$ et un $a \in GL(2,\mathbb{R})$ telle que $g \mapsto \phi(ga)$ n'est pas une forme automorphe.

SOLUTION: Personne n'a essayé de résoudre cette exercice, qui était pourtant l'exercice la plus facile. Le but était de montrer qu'avec un bon choix de a la fonction $g \mapsto \phi(ga)$ n'est pas K-finie, où $K = SO(2)$. Il suffit de choisir a en dehors du normalisateur de $SO(2)$ dans $GL(2,\mathbb{R})$ et ϕ un vecteur propre pour K. Pour simplifier je suppose que $\phi(gk_\infty z) = \phi(g)$ pour tout $k_\infty \in SO(2)$ et $z \in \mathbb{R}^\times$ mais on peut aussi prendre une fonction de poids μ pour $SO(2)$. Soit $\phi^a(g) = \phi(ga)$. Alors $\phi^a(gk') = \phi^a(g)$ pour tout $k' \in aSO(2)a^{-1}$. Si a n'est pas dans le normalisateur de $SO(2)$ alors $aSO(2)a^{-1} \neq SO(2)$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $GL(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{k}$ celle de $SO(2)\cdot\mathbb{R}^\times$. Maintenant si ϕ^a ètait une forme automorphe, donc K-finie, elle engendrerait une représentation de dimension finie de la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{k}$ et $ad(a)\mathfrak{k}$. On peut vérifier que la seule sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{k}$ et $ad(a)\mathfrak{k}$ est $\mathfrak{g}$ elle-même. Donc la représentation de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par ϕ^a serait de dimension finie, ce qui n'est jamais vrai sauf si ϕ est un caractère de $GL(2,\mathbf{A})$.

IV. Une *forme de Maass* pour $SL(2,\mathbb{Z})$ est une fonction $f \in C^\infty(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H})$ telle que

(1) f est de *croissance modérée* : il existe $M \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que

$$f(x+iy) \leq Cy^M, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, x^2+y^2 \geq 1$$

(2) $\int_0^1 f(x+iy)dx = 0$ pour tout $y > 0$.
(3) Condition (*) ci-dessous.

1.Définir une fonction

$$\phi \in C^\infty(G(\mathbb{Q})_+\backslash[G_+ \times GL(2,\mathbf{A}_f)]) = C^\infty(GL(2,\mathbb{Q})\backslash GL(2,\mathbf{A}))$$

(cf. Exercice II.0) par la formule

$$\phi(\gamma(g_\infty,k_f)) = f(g_\infty(i)),\ \gamma \in G(\mathbb{Q})_+, g_\infty \in G_+, k_f \in GL(2,\hat{Z}).$$

Soit D l'opérateur de Casimir de $GL(2,\mathbb{R})$:

$$D = -\frac{1}{4}(H^2 + 2RL + 2LR)$$

où $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $H = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que ϕ vérifie la condition suivante :

$$(*) \qquad D(\phi) = \lambda\phi.$$

a. Montrer que ϕ est une forme automorphe cuspidale et que $H\phi = Z\phi = 0$.

SOLUTION: On sait que ϕ vérifie les conditions de croissance et de cuspidalité par (1) et (2). D'ailleurs, $\phi(gk) = \phi(g)$ pour tout $k \in SO(2) \cdot \mathbb{R}^\times \times GL(2, \hat{\mathbb{Z}})$, ce qui implique la condition de K-finitude et que $H\phi = Z\phi = 0$. La dernière condition est que ϕ est annulée par un idéal de codimension finie dans le centre de l'algèbre enveloppante, et c'est une conséquence de la condition (*).

b. Montrer que $RL\phi = LR\phi$.

SOLUTION: Comme $RL - LR = H$ ceci est une conséquence de (a).

2. Soit (π, V) un $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module *de dimension* > 1 engendré par un vecteur $v \in V$ non-nul tel que

$$Dv = \lambda v, \; \pi(k)v = v \; \forall k \in K_\infty).$$

On suppose que V est muni d'une forme hermitienne $\langle , \rangle$ *positive* invariante sous K_∞, telle que

$$\langle Rw, w' \rangle = \langle w, Lw' \rangle$$

REMARQUE J'ai ajouté les deux conditions en italiques que j'avais oublié d'inclure.

a. Montrer que v est un vecteur propre pour $RL \in U(\mathfrak{g})$ avec valeur propre non nulle.

SOLUTION: La condition $\pi(k)v = v$ (et la définition de $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module) implique que $\pi(H)v = 0$. On voit comme ci-dessus que $\pi(RL)(v) = \pi(LR)(v)$, et on utilise la formule explicite pour D pour déduire que

$$\lambda v = Dv = -RLv.$$

Maintenant, on suppose $\lambda = 0$. Alors

$$< Lv, Lv >=< RLv, v >= 0$$

et de même

$$< Rv, Rv >=< v, LRv >= 0.$$

Puisque la forme est supposée positive, ceci implique que $Lv = Rv = Hv = Zv = 0$, et donc que (π, V) est la représentation triviale. Mais on a supposé que $\dim V > 1$.

b. On admet que tout élément de $U(\mathfrak{g})$ admet une expression unique comme combinaison linéaire des expressions de la forme $R^a L^b H^c Z^d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace de V des vecteurs annulés par $H \in \mathfrak{g}$ est de dimension 1. En déduire la décomposition de V en sous-espaces propres pour H.

SOLUTION: Cela reprend un argument du cours. Tout élément de V est combinaison linéaire des $\pi(R^a L^b H^c Z^d)v = \pi(R^a L^b)v$. Or $\pi(H)\pi(R^a L^b)v = 2(a - b)v$, donc si $\pi(H)\pi(R^a L^b)v = 0$ alors $a = b$. Comme $\pi(RL)v = \pi(LR)v$, on a $\pi(R^a L^a)v = \pi(RL)^a v$. Comme v est vecteur propre pour RL, ceci implique que le sous-espace annulé par H est de dimension 1. On déduit facilement que V décompose en sous espaces propres pour H avec valeur propre $2a$, $a \in \mathbb{Z}$, et que chaque espace propre est de dimension 1.