

**Feuille d'exercices n°5**  
**FONCTIONS DE WHITTAKER**  
**FORMES DE MAASS**

**Exercice 1. Laplacien hyperbolique.**

Sur  $\mathfrak{H}$ , on considère le Laplacien hyperbolique  $\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ .

- a) Montrer que  $\Delta$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 invariant sous  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  : pour  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ,  $\Delta(f \circ \gamma) = (\Delta f) \circ \gamma$ .
- b) Soit  $\omega = g \left( -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy \right)$ . Vérifier que  $d\omega = g \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy + \nabla f \cdot \nabla g dx \wedge dy$ , puis à l'aide de la formule de Stokes, que  $\langle g, \Delta f \rangle = \int \int \nabla f \cdot \nabla g dx \wedge dy$  (on se limitera au cas où  $f$  et  $g$  sont à support compact).
- c) En déduire que le Laplacien hyperbolique est un opérateur symétrique positif sur l'espace des fonctions  $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}, \mathbb{C}) : f, \Delta f \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}, \mathbb{C})\}$ .

**Exercice 2. Fonctions de Bessel et fonctions de Whittaker.**

Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on considère les deux fonctions de Bessel hyperboliques  $I_\alpha$  et  $K_\alpha$  définies par

$$I_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n + \alpha}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\pi \alpha)} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x(t + \frac{1}{t})} t^\nu \frac{dt}{t}$$

Elles sont solutions de l'équation de Bessel hyperbolique  $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \alpha^2) y = 0$ . De plus, au voisinage de  $+\infty$ , elles admettent respectivement les équivalents  $I_\alpha(y) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi y}} e^y$  et  $K_\alpha(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}$ .

Une fonction  $\mathcal{C}^\infty W: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$  est une *fonction de Whittaker* de type  $\nu$  associée au caractère  $x \mapsto e^{2\pi i n x}$  si l'on a  $\Delta W = \nu(1 - \nu)W$  et  $W(z + x) = W(z) e^{2\pi i n x}$ , pour tous  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathfrak{H}$ .

- a) Montrer qu'une telle fonction de Whittaker est de la forme  $W(z) = A(y) e^{2\pi i n x}$ , avec  $A'' - \left(4\pi^2 n^2 - \frac{\nu(1-\nu)}{y^2}\right) A = 0$ .
- b) En déduire que la fonction  $A$  est une combinaison linéaire des fonctions  $\sqrt{2\pi |n| y} I_{\nu - \frac{1}{2}}(2\pi |n| y)$  et  $\sqrt{2\pi |n| y} K_{\nu - \frac{1}{2}}(2\pi |n| y)$ .

**Exercice 3. Formes de Maass.**

Une forme de Maass de type  $\nu \in \mathbb{C}$  pour  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  est une fonction  $f: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$  non nulle, telle que

- i. pour  $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $z \in \mathfrak{H}$ ,  $f(\gamma z) = f(z)$  ;
  - ii.  $f \in \mathcal{L}^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}, \mathbb{C})$  ;
  - iii.  $\Delta f = \nu(1 - \nu) f$  ;
  - iv.  $\int_0^1 f(z) dx = 0$ .
- a) Montrer que  $\nu(1 - \nu)$  est un réel positif, i.e.  $\mathrm{Re}(\nu) = \frac{1}{2}$  ou  $\nu \in [0, 1]$ .
  - b) Montrer qu'une telle forme de Maass possède un développement de la forme  $f(z) = \sum_{n \neq 0} A_n(y) e^{2\pi i n x}$ , où  $W_n(z) = A_n(y) e^{2\pi i n x}$  est une fonction de Whittaker de type  $\nu$  associée au caractère  $x \mapsto e^{2\pi i n x}$ .

- c) En déduire l'existence du développement de Fourier-Whittaker : il existe des nombres complexes  $a_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) tels que  $f(z) = \sum_{n \neq 0} a_n \sqrt{2\pi |n| y} K_{\nu - \frac{1}{2}}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x}$ .
- d) Si  $\langle f, f \rangle = 1$ , montrer que les coefficients  $a_n$  vérifient  $a_n = O(\sqrt{|n|})$ .
- e) Montrer que, pour  $n_0$  assez grand, il n'existe pas de forme de Maass dont les coefficients de Fourier-Whittaker  $a_n$  sont nuls pour  $|n| \leq n_0$ .
- f) En déduire que l'espace des formes de Maass de type  $\nu$  fixé est de dimension finie.