

Feuille d'exercices n°8
OPÉRATEURS DE HECKE
(SUITE)

Exercice 1. On reprend les notations de l'exercice 3 de la dernière feuille pour l'appliquer à $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ et M_k le \mathbb{C} -espace vectoriel des formes modulaire de poids $2k$ sur un sous-groupe discret Γ' de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$.

- a) Montrer que M_k est bien un $\mathbb{Z}[G]$ -module.
- b) Montrer la décomposition $\{\gamma \in M_2(\mathbb{Z}) : \det \gamma = p\} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma = \left(\coprod_{0 \leq a < p} \Gamma \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) \coprod \Gamma \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) Interpréter la décomposition précédente en terme de réseaux.
- d) Comparer l'action de $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma$ et celle de $T(p)$.

Exercice 2. Montrer que la fonction $\Delta = (2\pi)^{12} q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ est une fonction propre des opérateurs de Hecke $T(n)$. Donner d'autres exemples de formes cuspidales propres.

Exercice 3. Soit $k \geq 2$. Montrer que l'espace des formes cuspidales de poids $2k$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède une base formées de formes $f(\tau) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ telles que $a_{mn} = a_m a_n$ pour tous $m, n \geq 1$ premiers entre eux.

Exercice 4. Soit $k \geq 2$ un entier. On considère la série d'Eisenstein $E_k(\tau) = 1 + \frac{(-1)^k 4^k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$, où $q = e^{2i\pi\tau}$. Montrer que sa série de Dirichlet est $\zeta(s) \zeta(s-2k+1)$.

Exercice 5. Soit $k \geq 2$ un entier, $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ une forme modulaire de poids $2k$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $L_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ sa série de Dirichlet.

- a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\sigma_k(n) = O(n^k)$.
- b) Montrer que f est une forme cuspidale si et seulement si $a_n = O(n^k)$.
- c) Montrer que $L_f(s)$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 2k$.