POINTS PÉRIODIQUES D'APPLICATIONS BIRATIONNELLES DE $\mathbf{P}^2$

CHARLES FAVRE

Periodic points of birational maps of $\mathbf{P}^2$

Let $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ be a birational map of $\mathbf{P}^2$ defined by three homogeneous polynomials of degree d with no common factors. We define f to be generic iff $\forall n \geq 0$, $f^{-n}(I(f))$ is finite where $I(f)$ is the set of points of indeterminacy of f. In dynamics, the number of periodic points and more precisely its growth rate with respect to the period is very interesting related in particular to the entropy of the system. We are interested here in studying the case of generic birational transformations of $\mathbf{P}^2$. The principal tool is the well-known theorem of Bezout. To use it in its full strength it's necessary to define precisely the multiplicity of a solution of a system which we recall in the first part. We study the multiplicity at the indeterminacy points and we are then able to prove the following central theorem:

Theorem 0.1.
Let $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ be a generic birational mapping of $\mathbf{P}^2$, and Fix^n the number of non-critical periodic points of f^n (counted with multiplicity). If Fix^n is finite for all $n \geq 1$, there exists a constant $D > 0$, s.t. $\forall n \geq 1$

$$d^n + 2 \geq Fix^n \geq d^n - D \ .$$

We deduce from that result that we can canonically associate to f a $(1,1)$ positive closed current T^+. It's defined as the limit of the following sequence of currents $T_n^+ := \frac{1}{d^n}(f^n)^*\omega$ where ω is the usual kahlerian form on $\mathbf{P}^2$. These currents have only a finite number of singularities, so that we can define their self-intersections. We then have:

Theorem 0.2.
Let $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ be a generic birational map of $\mathbf{P}^2$. Let us denote by I_+^∞ the increasing union of the sets of indeterminacy of the succesive iterates of f. I_+^∞ is at most countable. There exists a numerical function: $\mu_\infty : I_+^\infty \to \mathbf{R}_+^*$ of total mass $\sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z) = 1$ s.t.

$$\lim_{n\to\infty} T_n^+ \wedge T_n^+ = \sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+)\ \delta_z \ .$$

If $L(T^+)$, the set of points of $\mathbf{P}^2$ in a neighborhood of which the potential of T^+ is not locally bounded, admits a Stein neighborhood, we can define naturally the self-intersection $\mu_+ = T^+ \wedge T^+$, and we can rewrite the last theorem in this way.

Theorem 0.3.
Let f^+ be a generic birational map of $\mathbf{P}^2$; assume that $L(T^+)$ has a Stein neighborhood, then

$$\mu_+ = \sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+) \ \delta_z \ .$$

This hypothesis is not a dynamical one. We don't know if it is always satisfied, but the theorem should be true in a more general setting.

In a forthcoming paper, we will prove analog results for more general meromorphic maps.

Introduction

Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$ définie en coordonnées homogènes par trois polynômes de degré d premiers entre eux dans leur ensemble. On dira que f est générique si $\forall n \geq 0$, $f^{-n}(I(f))$ est fini où $I(f)$ désigne l'ensemble des points d'indétermination de f. En dynamique, le cardinal de l'ensemble des points périodiques, et plus précisement son type de croissance en fonction de la période, est très intéressant, lié en particulier à l'entropie du système. Nous nous proposons d'examiner le cas des applications birationnelles génériques. Pour cela, nous utilisons comme ingrédient principal le théorème de Bezout. Pour l'utiliser dans toute sa force, il est nécessaire de bien définir les multiplicités d'une solution d'un système, ce que nous rappelons dans la première partie. Nous prouvons alors le théorème central:

Théorème 0.1.
Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application birationnelle générique de $\mathbf{P}^2$, et Fix^n le nombre de points périodiques non-critiques de f^n (comptés avec multiplicité). Si Fix^n est fini pour tout $n \geq 1$, il existe une constante $D > 0$, telle que $\forall n \geq 1$

$$d^n + 2 \geq Fix^n \geq d^n - D \ .$$

On en déduit que l'on peut canoniquement associer à f un courant T^+ positif fermé de bidegré $(1,1)$. Celui-ci est défini comme limite de la suite de courants $T_n^+ := \frac{1}{d^n}(f^n)^*\omega$ où ω est la forme kahlérienne de Fubini-Study de $\mathbf{P}^2$. Ceux-ci n'ont qu'un nombre fini de singularités, on peut donc définir leur auto-intersection. On a alors le théorème:

Théorème 0.2.
Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application birationnelle générique de $\mathbf{P}^2$. Notons I_+^∞ la réunion des ensembles d'indétermination des itérés successifs de f, c'est un ensemble dénombrable. Il existe une fonction numérique $\mu_\infty : I_+^\infty \to \mathbf{R}_+^*$ de masse totale $\sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z) = 1$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} T_n^+ \wedge T_n^+ = \sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+) \ \delta_z \ .$$

Si $L(T^+)$, l'ensemble des points de $\mathbf{P}^2$ au voisinage desquels le potentiel de T^+ n'est pas borné, admet un voisinage Stein, on peut définir la self-intersection $\mu_+ = T^+ \wedge T^+$, et sous ces hypothèses, le théorème précédent se réécrit

Théorème 0.3.
Soit f^+ birationnelle, générique; supposons que $L(T^+)$ admette un voisinage Stein, alors

$$\mu_+ = \sum_{z \in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+)\ \delta_z\ .$$

A noter que cette hypothèse n'est pas de nature dynamique. Ce théorème est vraisemblablement valable en toute généralité.

Dans un papier à venir, nous nous intéresserons plus généralement au cas des applications méromorphes quelconques.

Remerciements: Tous mes remerciements à N. Sibony pour son aide et ses remarques durant la redaction de cet article.

1. Préliminaires: multiplicité d'idéaux et théorème de Bezout, produit extérieur de courant.

1.1. **Multiplicité et théorème de Bezout.** Pour la commodité du lecteur, nous rappelons quelques résultats liés à la définition des multiplicités d'idéaux.

Notations:

- $\mathcal{O}_0^n$ désignera l'espace des germes holomorphes en 0 dans $\mathbf{C}^n$.
- Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}_0^n$, $V(\mathcal{I})$ sera le germe de variété analytique défini par $\mathcal{I}$ en 0.

Proposition 1.1. [M76, p.120]
Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_0^n$ un idéal tel que $V(\mathcal{I}) = \{0\}$. Alors $\exists P_\mathcal{I} \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $\forall l \gg 0$,

$$\dim_\mathbf{C}(\mathcal{O}_0^n/\mathcal{I}^l) = P_\mathcal{I}(l).$$

$P_\mathcal{I}$ est de degré n et son terme dominant est de la forme $\mu(\mathcal{I})/n!$, où $\mu(\mathcal{I}) \in \mathbf{N}^*$.

Définition 1.2.
La multiplicité de $\mathcal{I}$ en 0 est par définition l'entier $\mu(\mathcal{I})$.

Proposition 1.3.

- $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mu(\mathcal{I}_1) \geq \mu(\mathcal{I}_2)$.
- $\mu(\mathcal{I}^k) = \mu(\mathcal{I}) \times k^n$.

Définition 1.4. *Un ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_0^n$ tel que $V(\mathcal{I}) = \{0\}$ est dit d'intersection complète ssi il est engendré par exactement n fonctions $\mathcal{I} = (f_1, \cdots, f_n)$.*

Dans le cas des idéaux d'intersection complète, le calcul de la multiplicité s'avère plus simple.

Proposition 1.5. *Multiplicité des idéaux d'intersection complète(voir* [S65]*)*

$$\mu(\mathcal{I}) = \dim_\mathbf{C} \mathcal{O}_0^n/\mathcal{I}.$$

Définition 1.6.
Si $\mathcal{I}$ est un idéal de A anneau commutatif intègre unitaire, on définit l'idéal $\overline{\mathcal{I}}$ appelé clôture intégrale de $\mathcal{I}$

$$\overline{\mathcal{I}} = \left\{ x \in A,\ \exists d \in \mathbf{N},\ a_k \in \mathcal{I}^k,\ x^d = \sum_{k=1}^{d} a_k x^{d-k} \right\}.$$

Définition 1.7.
Soient $g \in \mathcal{O}_0^n$, et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_0^n$. On note:

- $|g| \leq |\mathcal{I}|$ *ssi* $\exists (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{I}$, *et* $C > 0$ *tels que* $|g| \leq C \sum_{i=1}^r |f_i|$ *au voisinage de* 0.
- $|\mathcal{I}_1| \leq |\mathcal{I}_2|$ *ssi* $\forall g \in \mathcal{I}_1$, $|g| \leq |\mathcal{I}_2|$.

Théorème 1.8. *(voir* [LT72]*)*

$$\{g, |g| \leq |\mathcal{I}|\} = \overline{\mathcal{I}}.$$

Le résultat fondamental sur la croissance des idéaux est la proposition suivante.

Proposition 1.9. *(voir* [LT72]*)*

$$\mu(\mathcal{I}) = \mu(\overline{\mathcal{I}}).$$

Corollaire 1.10.

$$|\mathcal{I}_1| \leq |\mathcal{I}_2| \Rightarrow \mu(\mathcal{I}_1) \geq \mu(\mathcal{I}_2).$$

On peut donner une définition équivalente de la multiplicité en termes topologiques. Nous verrons dans la suite que les deux définitions (algébriques et topologiques) ont leurs propres attraits.

Soit donc comme précédemment $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_0^n$ un idéal tel que $V(\mathcal{I}) = \{0\}$. L'anneau $\mathcal{O}_0^n$ étant noethérien, on peut choisir $f_1, \cdots, f_k$ un système fini de générateurs de $\mathcal{I}$ ($k \geq n$). Ces fonctions sont toutes définies dans un voisinage U de 0. On introduit alors $f : U \to (\mathbf{C}^k, 0)$, $f = (f_1, \cdots, f_k)$. f est localement propre. Posons $Y = f(U)$. Y est un germe en 0 d'ensemble analytique de $\mathbf{C}^k$, irréductible, et de dimension n. f induit un revêtement ramifié de degré d de U sur Y. On définit

$$\mu_t(\mathcal{I}) = d \times \mu(0, Y),$$

où $\mu(0, Y)$ désigne la multiplicité de Y en 0. Celle-ci est définie géométriquement comme le degré d'une projection générique sur un sous-espace linéaire de dimension n dans $\mathbf{C}^k$ ([M76, p.75 et 122]).

Dans le cas des idéaux d'intersection complète, Y est un ouvert de $\mathbf{C}^n$. La multiplicité se réduit alors $\mu_t(\mathcal{I}) = \deg(f)$.

Théorème 1.11. *(voir* [M76]*)*

$$\mu_t(\mathcal{I}) = \mu(\mathcal{I}).$$

En application directe, on a le lemme

Lemme 1.12.
Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_0^n$ tel que $V(\mathcal{I}) = \{0\}$, et $g : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ un revêtement ramifié de degré local d. Alors

$$\mu(g^*\mathcal{I}) = d\mu(\mathcal{I}).$$

Dans la suite, on aura aussi besoin de définir une notion de multiplicité d'intersection de deux variétés ([M76, p.85 et 122]).

Soient donc V_1, V_2 deux germes de variétés analytiques de dimension respective p et q dans $(\mathbf{C}^n, 0)$, avec $p + q = n$. On définit $\mathcal{I}(V_i)$ les idéaux des germes analytiques s'annulant sur V_i.

Définition 1.13.
Si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, on définit la multiplicité de l'intersection de V_1 avec V_2 en 0 par $\mu(0, V_1 \cap V_2) := \mu(\mathcal{I})$ où $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V_1) + \mathcal{I}(V_2)$.

On peut aussi donner une définition géométrique de cette multiplicité. Dans un voisinage de 0 choisi convenablement, une perturbation linéaire de V_1 va produire génériquement d points d'intersection avec V_2, chaque intersection étant tranverse. Cet entier d est la multiplicité $\mu(0, V_1 \cap V_2)$ définie ci-dessus.

Rappelons maintenant le théorème de Bezout dans $\mathbf{P}^k$, qui sera l'outil principal dans toute la suite.

Théorème 1.14. *Théorème de Bezout*
Soient donnés k polynômes $P_1, \cdots, P_k$ homogènes en $k+1$ variables, et $V_i = P_i^{-1}(0) \subset \mathbf{P}^k$. Supposons que $\cap_{i=1}^k V_i$ soit fini. Alors le système

$$\forall i \in \{1, \cdots, k\},\ P_i(z_0, \cdots, z_k) = 0$$

admet exactement $\prod_{i=1}^k \deg(P_i)$ solutions dans $\mathbf{P}^k$, comptées avec multiplicité. La multiplicité en un point p est celle de l'idéal engendré par les germes de fonctions en p définies par les k polynômes dans une carte locale.

1.2. **Produit extérieur de courants.** Enfin, rappelons quelques définitions de produits extérieurs de courants positifs fermés. Nous nous plaçons ici dans le cadre précis dont nous aurons besoin dans la suite. Pour de plus de détails on se référera à [FS95] ou [De92].

Soient T_1 et T_2 deux courants positifs fermés définis dans $\mathbf{C}^2$. On note u_i $(i = 1, 2)$ des potentiels psh tels que $dd^c u_i = T_i$, et $\sigma_{T_i} = T_i \wedge \omega$ leur mesure trace, avec ω la forme de kahler canonique. On note aussi $L(u_i)$ l'ensemble des points au voisinage desquels u_i n'est pas bornée. Si $u_1 \in L^1(\sigma_{T_2})$, on peut définir le courant que l'on notera $dd^c u_1 \wedge T_2 = T_1 \wedge T_2$ par la formule

$$T_1 \wedge T_2 := dd^c(u_1 T_2)\ .$$

On a le critère d'existence suivant:

Proposition 1.15.
Si $L(u_1)$ admet un voisinage Stein, $u_1 \in L(\sigma_{T_2})$. On peut donc dans ce cas définir le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$.

On a alors le théorème de convergence suivant:

Théorème 1.16.
Supposons que $L(u_1)$ admette un voisinage Stein, et soient u_1^n et u_2^n deux suites de fonctions psh décroissantes respectivement vers u_1 et u_2. Alors on a convergence faible au sens des courants

$$dd^c u_1^n \wedge dd^c u_2^n \to dd^c u_1 \wedge dd^c u_2\ .$$

2. Points périodiques d'une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$

Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$, $f = [f_0 : f_1 : f_2]$ que l'on supposera toujours **dominante** (i.e. génériquement de rang 2). Les f_i sont des polynômes homogènes de degré d, et on peut les supposer premiers dans leur ensemble. L'ensemble $I(f)$ des points d'indétermination de f est défini par l'intersection $\cap_{i=0}^2 f_i^{-1}(0)$, et est donc fini. Le degré algébrique de f est par définition $d_a = d$. Le degré topologique d_t de f est le cardinal d'une fibre générique, ou le maximum des cardinaux des fibres finies. Lorsque $d_t = 1$, f est dite birationnelle. Si $p \in \mathbf{P}^2$, on définit

- $\mu(p, f)$ la multiplicité de p comme point d'indétermination de f, c'est-à-dire la multiplicité en p de l'idéal défini par les trois fonctions (f_i) dans des coordonnées locales; si p n'est pas un point d'indétermination, on posera $\mu(p, f) = 0$;
- $\mu_{fix}(p, f)$ la multiplicité de p comme point fixe de f (sous-entendu $p \notin I(f)$).

L'application f est dite **générique** si $\forall n \geq 0$, $f^{-n}(I(f))$ est fini.

Remarque:

Lorsque f est birationnelle, f est générique si et seulement si son inverse f^{-1} l'est (voir [Si98]).

Dans toute la suite, lorsque l'on parlera du degré d'une application rationnelle sans plus de précision, on entendra toujours le degré algébrique. De plus, $\#E$ désignera toujours le cardinal (sans multiplicité) de l'ensemble E.

2.1. Cardinal de l'ensemble d'indétermination d'une application méromorphe de $\mathbf{P}^2$.

Proposition 2.1.

Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application rationnelle de degré algébrique d_a et de degré topologique d_t. Alors on a

$$\sum_{z \in \mathbf{P}^2} \mu(z, f) = d_a^2 - d_t.$$

Remarque:

En particulier, si f est birationnelle de $\mathbf{P}^2$ dans lui-même de degré d, le nombre de points d'indétermination (avec les multiplicités précisées ci-dessus) est $d^2 - 1$.

Cette formule donne le nombre de points d'indétermination de f avec une multiplicité particulière. Notons $\#I(f)$ le cardinal de $I(f)$ sans multiplicité. L'ensemble Σ des points critiques est défini par l'annulation du polynôme $\det(\partial F_i/\partial z_j)$ de degré $3d - 3$ où les F_i sont des relevés à $\mathbf{C}^3$ des f_i. Pour toute application birationnelle de $\mathbf{P}^2$, f induit une surjection entre les composantes irréductibles de $\Sigma(f^{-1})$ et $I(f)$. Dans ce cas, on a en fait toujours $\#I(f) \leq 3d - 3$.

Démonstration. Soit $\alpha = [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2]$, un point de $\mathbf{P}^2$ tel qu'il existe $U \in \mathcal{V}(\alpha)$, vérifiant $f^{-1}(U) \cap I(f) = \emptyset$, et $\#f^{-1}(\alpha) = d_t$. Un tel point existe toujours car $I(f)$ est fini.

On considère alors le système dans $\mathbf{P}^3$

$$f_i(z) = \alpha_i t^d \ , i = 0, 1, 2 \ , \qquad (\mathcal{S})$$

où $z = (z_0, z_1, z_2)$, et t est une variable supplémentaire.

(1) $\mathcal{S}$ a un nombre fini de solution, car $I(f)$ et $f^{-1}(\alpha)$ sont finis, et $\mathcal{S} \subset I(f) \cup f^{-1}(\alpha)$.

(2) Dans $t = 1$, $\mathcal{S}$ se réduit à $f_i = \alpha_i$, $i = 0, 1, 2$. On a exactement $d_t \times d$ solutions, car on peut multiplier une solution du système $\mathcal{S}$ ($[z : t]$) par une racine d-ième de l'unité ζ ($[\zeta z : t]$) sans changer de point dans $\mathbf{P}^2$. Les multiplicités sont de plus conservées.

(3) Si $[p : 0] \in \mathcal{S}$, $p \in I(f)$. Calculons la multiplicité de $\mathcal{S}$ en un tel point. On peut supposer que $p = [0 : 0 : 1]$, et on se place dans la carte $(x, y) = \mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 - \{z_2 = 0\}$. On cherche comparer $\mu(p, f) = \mu(0, \{f_i(x, y)\})$ avec $\mu_{\mathcal{S}}(p) := \mu(0, \{f_i - \alpha_i t^d\})$ (toutes les multiplicités sont prises en 0). On introduit l'idéal $\mathcal{I}_T = (f_i - \alpha_i T)_{i=0,1,2}$. On a $d\mu(\mathcal{I}_T) = \mu_{\mathcal{S}}(p)$ par 1.12.

On va prouver l'estimée: $\exists C > 0$ telle que $\forall |T| < 1$, $d(f, T\alpha) \geq C|f|$, ou ce qui est équivalent

$$\sum_{i=0,1,2} |f_i - T\alpha_i|^2 \geq C|f|^2 \ . \tag{1}$$

Dans ces conditions, $\forall i \in \{0, 1, 2\}$, $|f_i| \leq |\mathcal{I}_T|$. Donc $f_0, f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{I}_T}$. Et, pour $\alpha_i \neq 0$, $T = \left(T - \frac{f_i}{\alpha_i}\right) + \frac{f_i}{\alpha_i} \in \overline{\mathcal{I}_T}$. On a alors les inclusions

$$\mathcal{I}_T \subset (f_0, f_1, f_2, T) \subset \overline{\mathcal{I}_T}.$$

D'où

$$\mu(\mathcal{I}_T) = \mu(\overline{\mathcal{I}_T}) = \mu(f_0, f_1, f_2, T) = \mu(f_0, f_1, f_2) = \mu(p, f).$$

Donc $\mu_{\mathcal{S}}(p) = d\mu(p, f)$.

Prouvons maintenant l'estimée 1. Par hypothèse, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall |x|, |y| \ll 1$, $d(f[x : y : 1], \alpha) > \varepsilon$, où d est la distance de $\mathbf{P}^2$ induite par la métrique de Fubini-Study. La distance d peut se calculer à l'aide des relevés des points dans $\mathbf{C}^3$ muni de la métrique euclidienne canonique,

$$d_{\mathbf{P}^2}(z, w) = \inf d_{\mathbf{C}^3}(Z/|Z|, W/|W|) \ .$$

Analysons géométriquement le problème (voir figure 1). Soit $T \in \mathbf{C}$ tel que $|T| < 1$. On se place dans le plan réel contenant $0, f$, et $T\alpha$. Notons Π la projection orthogonale du point $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathbf{C}^3$ sur la droite réelle passant par 0 et $\frac{T}{|T|}\alpha$, et $\pi > \theta > 0$ la mesure de l'angle entre les deux droites $(0, f)$ et $(0, \frac{T}{|T|}\alpha)$. Si $\theta > \pi/2$,

$$d(f, T\alpha) \geq |f| \ .$$

Sinon on a

$$d(f, T\alpha) \geq d(f, \Pi) = \sin(\theta)|f|.$$

Or $\sin(\theta) \geq \sin(\theta/2)$, et $2\sin(\theta/2) = d(f/|f|, \alpha T/|T|) \geq \varepsilon$. Donc

$$d(f, T\alpha) \geq \frac{\varepsilon}{2}\ |f|.$$

Ceci termine la démonstration de l'inégalité 1.

Le calcul des multiplicités en chaque solution et le théorème de Bezout donnent: $d^3 = d \times d_t + d \times \sum_{z \in \mathbf{P}^2} \mu(z, f)$. Le résultat s'en déduit immédiatemment. □

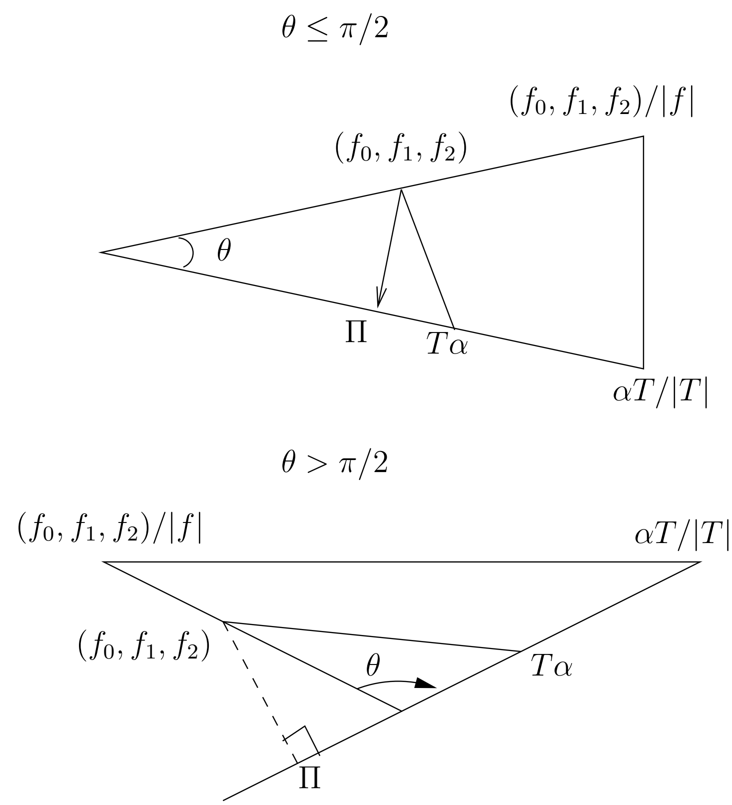


FIGURE 1. Analyse géométrique du problème

2.2. **Multiplicités des points d'indétermination des itérés d'une application méromorphe de $\mathbf{P}^2$.**

Pour l'étude dynamique des applications méromorphes de $\mathbf{P}^2$, il est nécessaire de calculer les multiplicités des points d'indétermination des itérés successifs.

Fixons quelques notations. Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application méromorphe de $\mathbf{P}^2$ de degré d. On notera $Gr(f) \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ l'adhérence du graphe de f, π_1 et π_2 les projections respectives de $Gr(f)$ sur le premier et le second facteur. Si $z \in I(f)$, $f(z)$ désignera simplement $f(z) = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}\{z\}$.

Proposition 2.2.
Soient f, g: $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$, deux applications rationnelles de degré respectifs d et l. Soit $z \in \mathbf{P}^2$, et supposons (H) que $g^{-1}(I(f))$ soit discret au voisinage de z. Alors

$$\mu(z, f \circ g) = d^2 \mu(z, g) + \sum_{\alpha \in g(z) \cap I(f)} \mu\left((z, \alpha), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}\{\alpha\}\right) \mu(\alpha, f). \tag{2}$$

$\mu((z,\alpha), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}\{\alpha\})$ désigne la multiplicité au point (z, α) de l'intersection de l'adhérence du graphe de g avec la variété $\pi_2^{-1}\{\alpha\}$.

Remarque 1. *L'hypothèse H implique la finitude de chaque terme du second membre.*

La formule précédente s'applique en particulier lorsque $g = f^n$.

Corollaire 2.3.
Soit f birationnelle générique. On a $\forall n \geq 0$,

(1) *si $z \in I(f^n)$,*
$$\mu(z, f^{n+1}) = d^2 \mu(z, f^n) + \sum_{\alpha \in f^n(z) \cap I(f)} \mu(\alpha, f),$$
(2) *si $z \notin I(f^n)$,*
$$\mu(z, f^{n+1}) = \mu(f^n(z), f).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbf{P}^2$, la suite $\mu(z, f^n)/d^{2n}$ a une limite que l'on note $\mu_\infty(z, f)$, et on a $\mu_\infty(z, f) > 0$ ssi $z \in \cup_{n \geq 0} I(f^n)$.

On peut donc calculer les multiplicités des points d'indétermination des itérés de f par récurrence en fonction des multiplicités $\mu(z, f)$, et des positions des images par f de l'ensemble critique de f^{-1}.

Démonstration.
Soient F, et G des relevés de f et g à $\mathbf{C}^3 - \{0\}$. On peut supposer que $z = [0 : 0 : 1]$, et on choisit des coordonnées x, y au voisinage de z. On introduit les deux idéaux
$$\mathcal{I}_1 = (F_0(G(x,y,1)), F_1(G(x,y,1)), F_2(G(x,y,1))),$$
$$\mathcal{I}_2 = (G_0(x,y,1), G_1(x,y,1), G_2(x,y,1)).$$
Par définition, on a $\mu(\mathcal{I}_1) = \mu(z, f \circ g)$, et $\mu(\mathcal{I}_2) = \mu(z, g)$. On remarque tout d'abord qu'on a toujours l'inclusion $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2^d$.

(1) Premier cas: $g(z) \cap I(f) = \emptyset$.

On peut alors trouver une constante strictement positive $C > 0$, tel que $\forall |x|, |y| \ll 1$
$$\left| F \left[\frac{G(x,y,1)}{|G(x,y,1)|} \right] \right| \geq C.$$
Ceci implique alors que $|F(G(x,y,1))| \geq C |G|^d$. Donc $\mathcal{I}_2^d \subset \overline{\mathcal{I}_1}$, et
$$\mu(\mathcal{I}_1) = \mu(\mathcal{I}_2^d) = d^2 \mu(\mathcal{I}_2) \ ,$$
par la proposition 1.9. On en déduit la formule en remarquant que la somme dans l'égalité 2 est nulle.

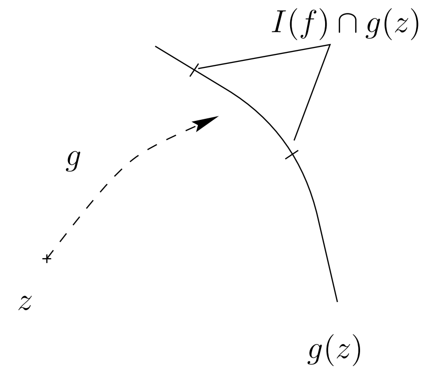
(2) Deuxième cas: z n'est pas un point d'indétermination pour g.

On utilise la définition géométrique de la multiplicité. g induit un revêtement ramifié de degré $\mu((z, g(z)), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}(g(z)))$ d'un voisinage de z sur un voisinage de $g(z)$. Le degré d'une application étant multiplicatif relativement à la composition des applications, le résultat s'en déduit immédiatement par 1.12.

(3) Cas général.

La méthode est de perturber l'application f pour faire apparaître chaque terme de la somme séparément.

Choisissons donc un paramètre réel ε, et une famille continue de matrice $A_\varepsilon \in GL(\mathbf{C}^3)$ telle que:



(a) $A_0 = \mathrm{Id}$,
(b) $I(f_\varepsilon) \cap g(z) = \emptyset$,
avec $f_\varepsilon = f \circ A_\varepsilon$. On notera aussi $F_\varepsilon = F \circ A_\varepsilon$.

On interprète géométriquement la multiplicité de $f \circ g$ en 0 comme le degré de la composée $\Pi \circ F \circ G$ en 0, où Π est une projection générique de $(\mathbf{C}^3, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ fixée dans toute la suite. Le degré est invariant par perturbation, donc pour ε assez petit $\mu(z, f \circ g)$ est simplement le nombre de solutions avec multiplicité de

$$\Pi \circ F_\varepsilon \circ G(z) = 0 \ . \qquad (\mathcal{S})$$

Soit donc α une solution de $\mathcal{S}$. Deux cas se présentent: soit $G(\alpha) = 0$ i.e. $\alpha = 0$; soit $g(\alpha) \in I(f_\varepsilon)$. Comme $I(f_\varepsilon) \cap g(z) = \emptyset$, la multiplicité de $\mathcal{S}$ en 0 est égale à $d^2\mu(z, g)$ par 1.

Notons $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} = g(z) \cap I(f)$, et $\alpha_i^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}\alpha_i$. En un point z_{ij}^ε vérifiant $g(z_{ij}^\varepsilon) = \alpha_i^\varepsilon$, la multiplicité de $\mathcal{S}$ est égale, par 2., à

$$\mu(\alpha_i^\varepsilon, f_\varepsilon)\mu\left((z_{ij}^\varepsilon, \alpha_i^\varepsilon), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}(\alpha_i^\varepsilon)\right).$$

Or une perturbation par un automorphisme de $\mathbf{P}^2$ ne change pas les multiplicités aux points d'indétermination donc

$$\mu(\alpha_i^\varepsilon, f_\varepsilon) = \mu(\alpha_i, f).$$

L'intersection géométrique se préservant par perturbation, on a aussi

$$\sum_j \mu\left((z_{ij}^\varepsilon, \alpha_i^\varepsilon), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}(\alpha_i^\varepsilon)\right) = \mu\left((z, \alpha_i), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}(\alpha_i)\right).$$

Donc on a bien

$$\mu = d^2\mu(z, g) + \sum_i \mu\left((z, \alpha_i), Gr(g) \cap \pi_2^{-1}(\alpha_i)\right)\mu(\alpha_i, f).$$

□

Démonstration. Corollaire
Les deux premières affirmations résultent simplement de la combinaison de l'application de la formule obtenue ci-dessus avec $g = f^n$ et de la remarque suivante. f^n étant birationnelle, la projection π_2 de $Gr(f^n)$ sur la deuxième composante est génériquement bijective, et l'hypothèse H est bien vérifiée dès que f est générique. Donc $\mu\left((z, \alpha), Gr(f^n) \cap \pi_2^{-1}(\alpha)\right) = 1$.

Notons $\nu_n(z) = \mu(z, f^n)/d^{2n}$. Alors $\nu_{n+1}(z) = \nu_n(z) + \frac{C_n}{d^{2n+2}}$ où $C_n = \sum_{\alpha \in f^n(z) \cap I(f)} \mu(\alpha, f)$ est un entier majoré par le nombre total de points d'indétermination d^2-1. Donc la série $\nu_{n+1}-\nu_n$ converge, et $\mu_\infty(z,f) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(z)$ existe. D'autre part, le fait que $\nu_n(z) > 0$ ssi $z \in I(f^n)$, et la croissance de la suite ν_n impliquent l'équivalence $\mu_\infty(z,f) > 0$ ssi $z \in \cup_{n\geq 0} I(f^n)$.

□

2.3. **Points périodiques d'une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$, applications.**
Nous voulons maintenant estimer le nombre de points périodiques d'une application birationnelle. Commençons par démontrer un résultat général pour une application méromorphe quelconque de $\mathbf{P}^2$. Δ désignera la diagonale dans $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$.

Théorème 2.4.
Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ de degré d telle que $\Delta \cap Gr(f)$ soit fini. Alors

$$1 + d + d^2 = \sum_{p \in Gr(f) \cap \Delta} \mu(p, \Delta \cap Gr(f)) + \sum_{z \in I(f)} \mu(z, f) \ .$$

Dans le cas où f est birationnelle, et si $p = (z, z)$ avec $z \in I(f)$, $\mu(p, \Delta \cap Gr(f))$ s'interprète naturellement comme la multiplicité comme point fixe de z pour l'inverse (si celui-ci est bien défini en ce point).

Fixons quelques notations. Soit f_+ une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$. On notera f_- son inverse. On notera $I_\pm := I(f_\pm)$ indifféremment l'ensemble d'indétermination et son cardinal, Fix le nombre (avec multiplicité) de points fixes non critiques p de f_+ (ou de manière équivalente de f_-) i.e. tels que $f(p) = p$ et $p \notin I_+ \cup I_-$. Les mêmes notations avec l'exposant n désignerons les mêmes ensembles ou quantités associés à $f_\pm^n$.

Théorème 2.5.
Toute application f_+ birationnelle, générique admet une infinité de points périodiques. Plus précisément, si Fix^n est fini pour tout $n \geq 1$, $\exists D = D(f_+) > 0$ tel que $\forall n \geq 1$,

$$d^n + 2 \geq Fix^n \geq d^n - D.$$

En particulier, dans ce cas,

$$\frac{1}{n} \log Fix^n \to_{n\to\infty} \log d.$$

Remarque: Les deux hypothèses birationnelle et générique sont en fait essentielles. Notons le résultat beaucoup plus délicat: lorsque f est un automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$, générique comme application de $\mathbf{P}^2$, Bedford, Lyubich et Smillie (voir [BLS93]) prouvent

$$\frac{1}{n} \log \#\{f^n(z) = z, \ z \text{ selle}\} \to_{n\to\infty} \log d \ .$$

Cet asymptotique est à rapprocher du résultat suivant de Briend (voir [B97]). Si $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ est holomorphe,

$$\frac{1}{n} \log \#\{f^n(z) = z, \ z \text{ répulsif}\} \to_{n\to\infty} 2 \log d \ .$$

Exemple 1. *L'application birationnelle* $f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 z_2 + z_2^2 : z_1 z_2 + z_0^2 : z_2^2]$ *se réduit à* $f(x, y) = (x + 1, y + x^2)$ *dans* $\mathbf{C}^2$*, et ne possède aucun point périodique en dehors de son ensemble d'indétermination.*

Exemple 2. *Soit* $f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_2(z_0 + z_2) : z_1^2 : z_2^2]$*.* f *est bien générique et le seul point périodique est situé sur l'hyperplan à l'infini* $z_2 = 0$*. Sa multiplicité est égale à* 1*.*

Remarque: Pour des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^2$, l'hypothèse de généricité implique directement la finitude de Fix^n. Il n'est n'en cependant rien en général.

Exemple 3. *Soit en effet*

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0(z_1 + z_2) : z_1(z_0 + z_2) : z_2(z_0 - 2z_1)] \; .$$

L'ensemble d'indétermination de f *est réduit aux trois points* $\{[0 : 0 : 1],\ [0 : 1 : 0],\ [1 : 0 : 0]\}$*; son ensemble critique est formé de trois hyperplans* $z_0 z_1 z_2 = 0$*, et chaque composante irréductible est envoyée sur un point fixe.*

$$\begin{array}{rcl} f\{z_0 = 0\} & = & [0 : 1 : -2] \circlearrowleft \\ f\{z_1 = 0\} & = & [1 : 0 : 1] \circlearrowleft \\ f\{z_2 = 0\} & = & [1 : 1 : 0] \circlearrowleft \end{array}$$

Cependant, sur la droite $z_0 = z_1$*,* f *est conjuguée à* $\tau \to -\tau - 1$*; tous les points de cette droite sont donc* 2*-périodiques.*

Considérons $f_+ : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une application birationnelle de degré d. On définit la fonction de Green sur $\mathbf{C}^3$ par

$$G^+(Z) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log |F_+^n(Z)| := \lim_{n\to\infty} G_n^+(Z),$$

où l'on a fixé F_+ un relevé à $\mathbf{C}^3$ de f_+.

Corollaire 2.6. *voir* [Di97]*,* [Si98]

La fonction G^+ *est psh, non-dégénérée, et vérifie l'équation fonctionnelle* $G^+ \circ F_+ = dG^+$*.*

Remarque: la non-dégénérescence de la fonction de Green G^+ pour les applications birationnelle a été démontrée initialement par Diller (voir [Di97]), avec une autre méthode, en utilisant des estimations volumiques, et par Sibony pour des applications rationnelles quelconques (voir [Si98]).

Démonstration.
On a toujours une inégalité du type $|F_+(Z)| \le C|Z|^d$. On en déduit que la suite $G_n^+ + \sum_{k\ge n} \log C/d^k$ est une suite décroissante de fonctions psh. Donc $G^+ := \lim_{n\to\infty} G_n^+$ existe, et définit une fonction psh. L'équation fonctionnelle découle de $G_n^+ \circ F_+ = dG_{n+1}^+$. Pour conclure, il suffit donc de voir que G^+ est non-dégénérée. Or ceci résulte facilement du théorème 2.5: G^+ est en effet fini en tout point périodique. $\square$

Rappelons que l'on peut définir T_n^+ (resp. T^+) des courants positifs, fermés, de bidegré $(1,1)$ dans $\mathbf{P}^2$, à partir des fonctions psh homogènes G_n^+ (resp. G^+)

par la formule $\pi^* T_n^+ = dd^c G_n^+$ où π est la projection naturelle de $\mathbf{C}^3 - \{0\}$ sur $\mathbf{P}^2$ (voir [FS92]). On notera de plus $I_+^\infty = \cup_{n\geq 0} I_+^n = \cup_{n\geq 0} f_-^n I_+$ la réunion des ensembles d'indétermination des itérés de f_+. On peut énoncer le théorème principal:

Théorème 2.7.
Soit $f^+ : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ une application birationnelle générique.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n^+ \wedge T_n^+ = \sum_{z\in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+)\ \delta_z\ .}$$

Se pose alors la question de savoir quand peut on appliquer la théorie générale des intersections de courants (proposition 1.15 et théorème 1.16) au courant T^+, afin de définir son auto-intersection. Notons $L(T^+)$ l'ensemble des points de $\mathbf{P}^2$ au voisinage desquels G^+ n'est pas localement bornée. On peut alors reformuler le théorème 2.7 sous la forme:

Théorème 2.8.
Soit $f^+ : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ une application birationnelle générique telle que $L(T^+)$ admette un voisinage Stein. Alors on peut définir naturellement la mesure $\mu_+ = T^+ \wedge T^+$ dans $\mathbf{P}^2$, et

$$\mu_+ = \sum_{z\in I_+^\infty} \mu_\infty(z, f_+)\ \delta_z\ .$$

L'exemple suivant nous indique que $L(T^+)$ peut être assez gros. Il répond aussi à une question de Diller (voir [Di97]) sur l'existence d'applications birationnelles génériques telles que $\exists p \in I^-$ avec $G^+|_{\pi^{-1}(p)} = -\infty$.

Exemple 4.
Il existe deux constantes b et c non nulles, telles que l'application birationnelle définie par

$$f[z:w:t] = [wt + cz(w+t) : w(t+bz) : t(w+bz)]$$

vérifie les propriétés:

(1) $I(f) = \{[0:0:1],\ [0:1:0],\ [1:0:0]\}$;
(2) *l'ensemble critique de f est réduit aux trois hyperplans $zwt = 0$;*
(3) $f(z=0) = [1:1:1]$, $f(w=0) = [c:0:b] \circlearrowleft$, $f(t=0) = [c:b:0] \circlearrowleft$;
(4) *l'hyperplan $\Delta = \{w = t\}$ est f-invariant, et $f|_\Delta$ est conjuguée à une rotation irrationnelle;*
(5) $[1:1:1] \notin I_+^\infty$;
(6) $[1:0:0] \in \overline{\cup_{n\geq 0} f^n[1:1:1]}$;

Si G est la fonction de Green associée à f,

7. $G(1,1,1) = -\infty$.

Les assertions 1. 2. 3. et 5. impliquent que f est générique, tandis que 7. implique que l'ensemble des pôles de G contient le point $[1:1:1]$, et donc $z = 0$. En particulier, l'ensemble $\{G = -\infty\}$ des pôles de G n'admet aucun voisinage Stein .

Démonstration.
Les assertions 1. 2. et 3. sont immédiates. Sur Δ, on a

$$f[z:w:w] = [w(w+2cz) : w(w+bz) : w(w+bz)] \ .$$

En particulier Δ est bien invariante. Remarquons tout d'abord que $I^+_\infty \cap \Delta = \cup_{n\geq 0} f^{-n}([1:0:0])$. Il suffit donc pour prouver 5. de vérifier que $[1:0:0] \notin \cup_{n\geq 0} f^n[1:1:1]$.

En coordonnées $[z:1:1]$ sur Δ, f se réécrit

$$f(z) = \frac{2cz+1}{bz+1} \ .$$

Posons $\nabla = \sqrt{4b+(2c-1)^2}$ en choisissant la solution de partie réelle positive. Si $\nabla \neq 0$, les deux points $z_\pm = (2c-1\pm\nabla)/2b$ sont les deux points fixes de f. Le changement de coordonnées $\tau = z - z_-/z - z_+$ conjugue f à

$$f(\tau) = -\frac{(2c-1)^2+4b+\nabla(2c+1)}{(2c-1)^2+4b-\nabla(2c+1)}\tau := \theta\tau \ .$$

Dans ces coordonnées, le point $[1:0:0]$ est le point $\tau_0 = 1$, et le point $[1:1:1]$ correspond à $\tau_1 = z_- - 1/z_+ - 1$. Soient ϕ et $\psi \in [0,1]$ deux réels fixés, avec ψ non entier. Il est alors possible de choisir b et c, tels que

- $\tau_1(b,c) = e^{2i\pi\psi} \neq 1$,
- $\theta(b,c) = e^{2i\pi\phi}$.

Pour prouver cela, il suffit de prouver que le système algébrique suivant admet des solutions dans $\mathbf{C}^3$:

$$\begin{array}{rcl}
(2c-1)^2+4b+\nabla(2c+1) & = & -e^{2i\pi\phi}\left((2c-1)^2+4b-\nabla(2c+1)\right) \\
2c-2b-1-\nabla & = & e^{2i\pi\psi}(2c-2b-1+\nabla) \\
\nabla^2 & = & (2c-1)^2+4b
\end{array}$$

Le système à l'infini se réécrit

$$\begin{array}{rcl}
4c^2+2\nabla c & = & -4e^{2i\pi\phi}c^2+2e^{2i\pi\phi}\nabla c \\
2c-2b-\nabla & = & e^{2i\pi\psi}(2c-2b+\nabla) \\
\nabla^2 & = & 4c^2
\end{array}$$

qui ne possède pas de solutions non-nulles. On en déduit que le nombre de solutions dans $\mathbf{P}^3$ du système initial est fini, égal à 4, et toutes les racines sont localisées dans $\mathbf{C}^3$.

Maintenant par [Di97], $G(1,1,1) = -\infty$ est équivalent à la divergence de la série

$$S := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log d(f^n[1:1:1], I^+) \ ,$$

qui dans notre cas se majore par

$$\begin{aligned} S \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log|f^n(\tau_1) - 1| &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log|e^{2i\pi(\psi+n\phi)} - 1| \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log|\sin(\pi(\psi+n\phi))| + \sum_{n\geq 0} \frac{\log 2}{2^n} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log|\{\psi+n\phi\}| + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \log 2\pi \ , \end{aligned}$$

où $\{x\}$ dénote la partie fractionnaire de x. On choisit maintenant $\psi = -1/2$, et $\phi = \sum_{n\geq 0} 1/2^{a_n}$, avec a_n défini par récurrence, a_0=1, et $a_{n+1} = 2^{2^{a_n-1}} + a_n$. On a alors l'estimée

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^{a_n-1}}} \log\{\psi + 2^{a_n-1}\phi\} &\leq \frac{1}{2^{2^{a_n-1}}} \log 2^{a_n - a_{n+1}} \\ &\leq \frac{a_n - a_{n+1}}{2^{2^{a_n-1}}} \log 2 \\ &\leq -\log 2 \ . \end{aligned}$$

Donc $S = -\infty$ et $G(1,1,1) = -\infty$. On conclut la démonstration en remarquant que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\{\psi + n\phi\} \neq 0$, car ϕ est transcendant, donc 5. est vérifié. $\square$

Démonstration. théorème 2.4

Pour étudier les points fixes de f, on étudie le système $\mathcal{S}$.

$$f_i(z) = z_i t^{d-1} \ i = 0, 1, 2 \ . \qquad (\mathcal{S})$$

Comme précédemment, $\mathcal{S}$ a un nombre fini de solutions; on peut donc appliquer le théorème de Bezout.

Les solutions de $\mathcal{S}$ dans $t = 1$ conduisent aux points fixes de f. Pour un point fixe p de f dans $\mathbf{P}^2$, il y a exactement $d-1$ solutions de $\mathcal{S}$ se projetant sur p (on peut multiplier la variable t par une racine de l'unité $\zeta^{d-1} = 1$), ayant toute la même multiplicité que p.

Le point $[0:0:0:1]$ est solution avec la multiplicité 1.

Soit donc $[p:0] = [0:0:1:0]$ une solution de $\mathcal{S}$ avec $p \in I(f)$. Par définition, et en reprenant les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{S}}(p) &= \mu(0, \{f_0 - xt^{d-1}, f_1 - yt^{d-1}, f_2 - t^{d-1}\}) \\ &= (d-1)\mu(0, \{f_0 - xf_2, f_1 - yf_2\}). \end{aligned}$$

On note $\mu = \mu(0, \{f_0 - xf_2, f_1 - yf_2\})$. Soit $g_\varepsilon : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, $g_\varepsilon(x,y) = (f_0 - xf_2 + \varepsilon_1 f_2, f_1 - yf_2 + \varepsilon_2 f_2)$, où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est un couple choisi tel que $(0,0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \notin Gr(f)$. On a $\deg(g_0) = \mu$. Par homotopie, on aura $\deg(g_\varepsilon) = \mu$. Par hypothèse $(0,0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \notin Gr(f)$, donc $\pi_1[Gr(f) \cap \Delta_\varepsilon]$ évite le point $(0,0)$ avec $\Delta_\varepsilon = \{(x_1, x_2, x_1 + \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)\}$. Donc

$$\forall |x|, |y| \ll 1, \ \left| x - \frac{f_0}{f_2} + \varepsilon_1 \right|^2 + \left| y - \frac{f_1}{f_2} + \varepsilon_2 \right|^2 \geq \delta > 0,$$

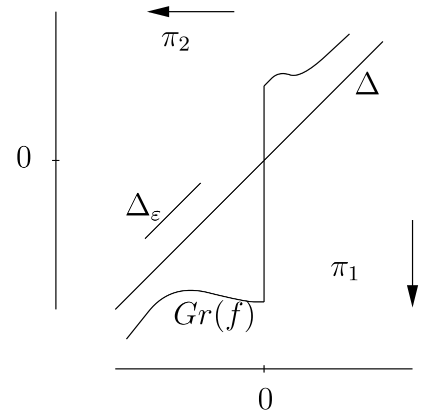


FIGURE 2. Graphe de f

pour une certaine constante strictement positive. D'où

$$\forall |x|, |y| \ll 1,\ |f_2|^2 \leq \frac{1}{\delta}\left(|xf_2 - f_0 + \varepsilon_1 f_2|^2 + |yf_2 - f_1 + \varepsilon_2 f_2|^2\right). \qquad (3)$$

Calculons $g_\varepsilon^{-1}(0)$ (avec multiplicité naturellement). Dans $f_2 \neq 0$, on est réduit à $\{\frac{f_0}{f_2} - x = \varepsilon_1\} \cap \{\frac{f_1}{f_2} - y = \varepsilon_2\}$, i.e. $\sum_{z\in Gr(f)\cap\Delta_\varepsilon} \mu(z, Gr(f)\cap\Delta_\varepsilon)$. On obtient donc

$$\sum_{z\in Gr(f)\cap\Delta_\varepsilon} \mu(z, Gr(f)\cap\Delta_\varepsilon) = \sum_{z\in Gr(f)\cap\Delta} \mu(z, Gr(f)\cap\Delta)$$

points par déformation.

Calculer le nombre de préimages dans $f_2 = 0$ revient à estimer $\mu(0, \mathcal{I}) := \mu(0, \{f_0 - xf_2 + \varepsilon_1 f_2, f_1 - yf_2 + \varepsilon_2 f_2\})$. Mais l'inégalité 3 implique que $f_2 \in \overline{\mathcal{I}}$. On en déduit que $\overline{\mathcal{I}} \supset (f_0, f_1, f_2)$, et

$$\mu(\mathcal{I}) = \mu(\overline{\mathcal{I}}) = \mu(f_0, f_1, f_2) = \mu(p, f).$$

Au total, on aura prouvé que

$$d^3 = 1 + (d-1)\left[\sum_{z\in I(f)} \mu(z, f) + \sum_{z\in Gr(f)\cap\Delta} \mu(z, Gr(f)\cap\Delta)\right].$$

□

Démonstration. Théorème 2.5

Supposons tout d'abord que pour tout $n \geq 1$, Fix^n soit fini. Notons

- $F_+^n := \sum_{z\in I_+^n} \mu((z,z), Gr(f_+^n)\cap\Delta)$,
- $F_-^n := \sum_{z\in I_-^n} \mu((z,z), Gr(f_+^n)\cap\Delta) = \sum_{z\in I_-^n} \mu_{fix}(z, f^n)$.

Le théorème précédent nous donne $Fix^n + F_+^n + F_-^n + I_+^n = 1 + d^n + d^{2n}$, $\forall n \geq 0$, i.e.

$$Fix^n + F_+^n + F_-^n = d^n + 2.$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que F_+^n et F_-^n sont finis. Le raisonnement étant analogue dans les deux cas, on se restreindra à F_+^n. Soit donc $p \in I_+^n$.

Comme f_- est générique, f_-^n est définie au voisinage de p pour tout n. La multiplicité de $Gr(f_+^n)\cap\Delta$ au point p peut donc s'interpréter simplement comme la multiplicité de p comme (éventuel) point fixe de f_-^n. On utilise alors le résultat suivant de Shub-Sullivan (voir [SS73]).

Soit $g : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ un germe holomorphe. La suite $\mu_{fix}(0, g^n)$ est bornée.

On peut donc introduire D le réel: $D = \max\{\mu_{fix}(p, f_-^n),\ p \in I_+, n \geq 0\}$. Maintenant si p ($\in I_+^n$) est f_--périodique, son orbite intersecte nécessairement I^+. En effet, un point possédant au moins deux préimages par f_- appartient à I^+. De plus, la multiplicité d'un point périodique est invariante le long de son orbite. On a donc $\mu((p,p), Gr(f_+^n)\cap\Delta) \leq D$. On en déduit la majoration $F_+^n \leq D(d^{2N}-1)$, où $N = \max_{z\in I^+}\min_{n\in\mathbf{N}^*}\{n, f_-^n(z) = z\}$ (avec la convention $\min\emptyset = 0$). Le résultat s'en déduit immédiatement.

Pour conclure le théorème i.e. prouver que toute application birationnelle générique admet une infinité de points périodiques, il suffit de réutiliser le résultat de Shub-Sullivan dans le cas où Fix^n est fini pour tout $n \geq 1$, et de remarquer que sinon le résultat est immédiat.

$\square$

Démonstration. Théorème 2.7

Remarquons tout d'abord que $L(T_n^+) = I_n^+$, et qu'en dehors de I_n^+, le courant T_n^+ est une forme lisse. On peut donc bien définir $T_n^+\wedge T_n^+$.

Choisissons alors $p = [p_0 : p_1 : p_2]$ un point périodique de f_+ non critique. Quitte à remplacer f par un itéré (T^+ reste alors inchangé), on peut supposer que p est fixe. Choisissons de plus deux hyperplans $H_1 = 0$ et $H_2 = 0$ distincts, et s'intersectant en p. Posons $\widetilde{G_0}(Z) = \frac{1}{2}\log\left(|H_1|^2 + |H_2|^2\right)$, puis $\widetilde{G_n}(Z) = \frac{1}{d^n}\widetilde{G_0}\circ F_+^n(Z)$, avec F_+^n un relevé à $\mathbf{C}^3$ de f_+^n. On note $\widetilde{T_+^n}$ le courant positif fermé associé à $\widetilde{G_+^n}$.

Lemme 2.9. *(voir* [De92]*)*
Soient h_1, h_2 deux germes holomorphes de $(\mathbf{C}^2, 0)$ tels que $\mathcal{I} = (h_1, h_2)$ vérifie $V(\mathcal{I}) = \{0\}$. Alors

$$(dd^c)^2\log(|h_1| + |h_2|) = \mu(\mathcal{I})\delta_0\ .$$

Le lemme donne alors

$$\widetilde{T_+^n}\wedge\widetilde{T_+^n} = \frac{1}{d^{2n}}\sum_{z\in I_+^n}\mu(z, f^n)\ \delta_z + \frac{1}{d^{2n}}\delta_p\ .$$

Admettons l'estimée

$$\left|\widetilde{G_n}(Z) - G_n(Z)\right| \leq \frac{C_1\cdot n + C_2}{d^n} + \frac{1}{d^n}\log\ dist(\pi(Z), p)\ , \tag{4}$$

avec C_1, C_2 deux constantes fixes. On a alors convergence uniforme locale sur tout compact de $\pi^{-1}(\mathbf{P}^2 - \{p\})$ de la suite $\widetilde{G_n} - G_n \to 0$, et $\widetilde{T_n^+}\wedge\widetilde{T_n^+} - T_n^+\wedge T_n^+ \to 0$ faiblement dans $\mathbf{P}^2 - \{p\}$. On déduit alors du corollaire 2.3,

$$T_n^+\wedge T_n^+|_{\mathbf{P}^2-\{p\}} \to \sum_{z\in I_+^\infty - \{p\}}\mu_\infty(z, f_+)\ \delta_z\ .$$

On applique alors le même raisonnement à un autre point périodique distinct de p pour conclure.

Prouvons maintenant l'estimée 4. On notera $H(Z) = (H_1(Z), H_2(Z))$. $\exists C > 0$, $\forall Z \in \mathbf{C}^3$,

$$\frac{1}{C} \cdot |Z| \cdot dist(\pi(Z), p) \leq |H(Z)| \leq C \cdot |Z| \ .$$

L'inégalité de droite est immédiate; celle de gauche résulte du fait qu'on a choisi deux hyperplans s'intersectant transversalement en p.

Soit $Z \notin \pi^{-1}(I_+^n)$. On applique l'inégalité précédente à $F^n(Z)$ pour trouver

$$\frac{1}{C} \cdot |F^n(Z)| \cdot dist(f^n(\pi(Z)), p) \leq |H(F^n(Z))| \leq C \cdot |F^n(Z)| \ .$$

Si A minore le module des valeurs propres de la différentielle de f en p, on peut minorer la distance $dist(f(\pi(Z)), p)$:

$$dist(f(\pi(Z)), p) \geq A dist(\pi(Z), p) \ .$$

Cette inégalité est en effet vraie dans un voisinage de p, et comme p est non-critique, et f est birationnelle, elle reste valable pour tout point de $\mathbf{P}^2$. On en déduit par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$dist(f^n(\pi(Z)), p) \geq A^n dist(\pi(Z), p) \ .$$

D'où

$$\frac{A^n}{C} \cdot |F^n(Z)| \cdot dist(\pi(Z), p) \leq |H(F^n(Z))| \leq C \cdot |F^n(Z)| \ ,$$

dans $\mathbf{C}^3 - \pi^{-1}(I_+^n)$ puis partout dans $\mathbf{C}^3$ par continuité. On en déduit l'inégalité 4 en passant au log.

□

Démonstration. Théorème 2.8

Le théorème découle facilement du théorème précédent 2.7. En effet, on a vu que la suite $G_n + \sum_{k \geq n} \log C/d^k$ était décroissante, donc les hypothèses nous permettent, d'une part d'après 1.15 de définir $T^+ \wedge T^+$, d'autre part d'après 1.16, de conclure que $T_n^+ \wedge T_n^+ \to T^+ \wedge T^+$. □

References

[BLS93] E. BEDFORD, M. LYUBICH, ET J. SMILLIE. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$, Invent. Math., 114, 1993.

[B97] J. BRIEND. Exposants de Lyapunov des endomorphismes holomorphes de $\mathbf{P}^k$, 1997, preprint.

[De92] J.P. DEMAILLY, Analytic geometry, 1992.

[Di97] J. DILLER, Dynamics of birational maps of $\mathbf{P}^2$, Indiana math. jour., 45 ,1997.

[FS92] J.E. FORNAESS et N. SIBONY, Complex dynamics in higher dimension II, Ann. of math. studies n. 137, Modern methods in complex analysis, Princ. univ. press, 1992.

[FS95] J.E. FORNAESS et N. SIBONY, Oka's inequality for currents and applications, Math. ann., 301, 1995.

[LT72] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, Centre math. de l'Ecole Polytechnique, 1972.

[M76] D. MUMFORD, Algebraic geometry: complex projective varieties, Grundlehren der math. Wiss., n. 221, Springer Verlag, 1976.

[S65] J.P SERRE, Algèbre locale et multiplicités, chapitre 4, lectures notes in math. n. 11, Springer Verlag, 1965.

[SS73] M. SHUB et D. SULLIVAN, A remark on the Lefschetz fixed point formula..., Topology, 13, 1973.

[Si98] N. SIBONY, Dynamiques des applications rationelles de $\mathbf{P}^k$, Survey, 1998

Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, S-100 44 Stockholm, Sweden

E-mail address: favre@math.kth.se