Nom :	**CHAROLLOIS**
Prénom :	**Pierre**

Grade :	Maître de Conférences
Etablissement :	Université Paris 6
Unité :	Institut de Mathématiques de Chevaleret (UMR 7586)
Arrivée :	Dans l'équipe de théorie des nombres : septembre 2006.

État civil

Nom	**CHAROLLOIS**
Prénom	**Pierre**
Date de naissance	21 avril 1976 à Roanne, (42) France
Situation familiale	Célibataire
Nationalité	Français

Coordonnées

Adresse professionnelle	Institut de mathématiques de Jussieu Université Paris 6 4 Place Jussieu 75005 Paris
Tél. professionnel	(+1) 01 44 27 85 71
e-mail	charollois@math.jussieu.fr

Adresse permanente	5 rue Réaumur 75003 Paris (France)

Cursus

juin – juillet 2010	visiting prof. à CRM Barcelone
mars 2010 – avril 2010	visiting prof. à UC Santa Cruz
aout. 2008 – oct. 2008	visiting prof. à UC Santa Cruz
sept. 2007 – janv. 2008	visiting scholar à Harvard
depuis sept. 2006	Maître de conférences à Paris 6.
2005 – 2006	stagiaire postdoctoral au CRM (Montréal), à l'invitation du professeur Henri Darmon.
2004 – 2005	ATER à l'IUT d'informatique de l'Université de Bordeaux 1.
2001 – 2004	**Thèse de Doctorat** à l'Université de Bordeaux 1.

Titre : *Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert.*

Directeurs :	Philippe Cassou-Noguès,	Université Bordeaux 1	
	Martin Taylor,	Université de Manchester	
(co-tutelle :	Bordeaux 1 et Université de Manchester)		
Soutenance :	13 décembre 2004		
Mention :	Très honorable		
Rapporteurs :	Pr. Roelof Bruggeman,	Université d'Utrecht	
	Pr. Henri Darmon,	Université McGill	
Jury :	Pr. Loïc Merel,	Univ. Paris 7,	Président
	Pr. Christophe Bavard,	Univ. Bordeaux 1,	Examinateurs
	Pr. Philippe Cassou-Noguès,	Univ. Bordeaux 1	
	Pr. Emmanuel Kowalski,	Univ. Bordeaux 1	
	Pr. Marc Perret,	Univ. Toulouse 2	
	Pr. Martin Taylor,	Univ. de Manchester	

Activités de recherche

Thèmes de recherche développés :

Théorie des nombres, Valeurs spéciales de fonctions L, Sommes de Dedekind, Conjectures de Stark, Surfaces modulaires de Hilbert, Algorithmique algébrique.

Points forts :

En collaboration avec Henri Darmon, formulation d'un raffinement de la conjecture de Stark au moyen des formes modulaires de Hilbert. Tests numériques de cette conjecture forte. Au passage, on a obtenu la construction de "sommes de Dedekind" attachées à un corps de nombres totalement réel ainsi que leurs principales propriétés.

Publications

Thèse : (soutenue le 13/12/2004)	Pierre Charollois : "Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert". Université Bordeaux 1, 193 pages. Disponible sur le web http ://www.dms.umontreal.ca/∼charolp/pageperso.html
Journal de Crelle **610**, 125-147 (2007).	Pierre Charollois : "Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement ré
Actes de Summer School 2006, Clay Inst.)	Pierre Charollois : "Generalized Fermat equations (d'après Halberstadt-Kraus)".
Algebra&Number Theory (2008) **2** Vol 6 p. 655-688	Pierre Charollois, Henri Darmon (Univ. McGill, Montréal) : "Argument des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein".

En préparation

Pierre Charollois, Samit Dasgupta (UC Santa Cruz) :
"An integral Eisenstein cocycle for GL_n and p-adic L-functions".

Missions de longue durée à l'étranger (autres que conférences)

• 3 séjours de recherche de 6 semaines chacun à l'Université de Manchester printemps 2002, 2003 et 2004

• séjour de recherche d'un mois à l'Université de McGill (Montréal) à l'invitation du Professeur Henri Darmon (mars 2005)

• stage postdoctoral de 2 ans à l'Université de McGill (Montréal) à l'invitation du Professeur Henri Darmon (depuis sept.2005)

• séjour d'une semaine à Pennsylvania University (Philadelphie) à l'invitation du Professeur Ted Chinburg (février 2006)

• séjour de 4 semaines à Gottingen : conférencier invité à l'école d'été 2006 du Clay Institute en géométrie arithmétique (17/07/06-11/08/06)

• séjour de 4 mois à Harvard : visiting scholar invité (01/09/07-15/01/08).

• séjour de 2 mois à UC Santa Cruz : Prof. invité (15/08/08-15/10/08).

• séjour de 2 mois à UC Santa Cruz : Prof. invité (15/08/08-15/10/08).

• séjour de 2 mois au CRM (Barcelone) : invited researcher (2009-2010).

Activités d'encadrement

• **Encadrement de projet de recherche** de premier cycle (CRM-ISM, Montréal) pendant 4 mois (01/05/2006-31/08/2006).
Etudiant : Agnès Beaudry (McGill), sujet : "L'algorithme euclidien en k-étapes dans un corps quadratique réel."

• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2007)
Etudiant : Ronan Terpereau
Stage de magistére de l'ENS-Lyon , sujet : "Le théorème de Mordell-Weil."

• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2008)
Etudiant : Pierre Le Boudec
Stage de M2 de l'ENS-Lyon , sujet : "Gross-Stark units."

• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2009)
Etudiant : Nicolas Provost
Stage de M2 de Paris 6 , sujet : "p-adic integral of Eisenstein series."

- **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2009)

Etudiant : Samuel Le Fourn
Stage de M1 de l'ENS-Lyon , sujet : "fonctions L associées à un Grossencharakter."

- **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 20010)

Etudiant : Claire Glanois
Stage de M1 de l'école Polytechnique , sujet : "Cocycles entiers pour SL_2"

Exposés comme orateur principal

- 18/11/2004 : Séminaire de théorie des nombres de Toulouse 2 Le Mirail
- 25/01/2005 : Séminaire d'algèbre et de théorie des nombres de l'EPFL (Lausanne)
- 01/02/2005 : Séminaire d'arithmétique de Saint-Etienne
- 07/02/2005 : Séminaire de théorie algébrique des nombres de Limoges
- 09/03/2005 : Séminaire de théorie des analytique des nombres de l'Université de Montréal
- 31/03/2005 : Séminaire de théorie des nombres de Québec-Vermont (Montréal)
- 04/04/2005 : Séminaire de théorie des nombres de Montpellier
- 14/04/2005 : Séminaire de théorie des nombres et combinatoire de Lyon
- 15/04/2005 : Séminaire de théorie des nombres de Caen
- 17/02/2006 : Galois seminar, University of Pennsylvania (Philadelphie)
- 20/02/2006 : Algebra seminar, University of Pennsylvania (Philadelphie)
- 24/04/2006 : Séminaire "autour de la géométrie d'Arakelov" de Jussieu
- 04/12/2006 : Colloquium, Rutgers-Newark University (USA)
- 05/02/2006 : Séminaire de théorie des nombres de Jussieu
- 06/04/2007 : Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux
- 07/11/2007 : Séminaire de théorie des nombres de Harvard
- 20/11/2007 : Séminaire d'algèbre, Boston University
- 10/12/2007 : Colloquium, Rutgers-Newark University (USA)
- 10/10/2008 : Séminaire, UCSC (USA)
- 11/2009 : Journée Dr Honoris Causa M.J. Taylor, Bordeaux
- 13/4/2010 : Séminaire, UCSC (USA)

Exposés à des conférences internationales

- 20-24/06/2005 : Conférence Gauss-Dirichlet, Gottingen
- 01-03/11/2005 : Workshop informel sur les conjectures de Stark (Montréal) (**co-organisateur**)
- 28/07/2006 : summer school à Gottingen organisée par le Clay Institute
- 03/06/2007 : conférence BIRS (Banff, Canada) Modular forms : arithmetic and computations
- 01/10/2007 : SAGE Days 7 : Stark-heegner points computations (Harvard)
- 06/2008 : conférence Canada-France, session de théorie des nombres.
- 10/2009 : conférence "Sommes de Dedekind", Banff.
- 12/2009 : conférence "Cycles arithmétiques", CRM Barcelone.

Activités administratives

- **Élu** en 2003 représentant des doctorants au conseil de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux.
- **Co-organisateur** de la journée "Modules galoisiens et fonctions L" le 27 nov. 2004 à Bordeaux.
- **Co-organisateur** du workshop "autour des conjectures de Stark", 1-3 nov. 2005, CRM (Montréal).
- **Elu** au conseil de l'UFR de Maths de Paris 6 (2009).
- **Co-organisateur** du colloque "Cycles arithmétiques et fonctions L", à Banff, oct. 2011.

Programme de recherche : Théorie des nombres

Valeurs spéciales de fonctions L,
périodes de formes modulaires de Hilbert et unités de Stark.

1 Thématique de la recherche proposée

L'objectif premier de notre travail est d'obtenir de nouveaux résultats, à la fois théoriques et algorithmiques, en direction du 12ème problème de Hilbert (ou rêve de jeunesse de Kronecker) et des conjectures de Stark et de Gross-Stark. Pour cela, nous étudions les périodes de formes modulaires de Hilbert, en particulier de séries d'Eisenstein en plusieurs variables. Leurs périodes semblent fournir un substitut naturel de la notion d'unité modulaire en dimension supérieure.

Le $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert consiste à construire des générateurs des extensions abéliennes d'un corps de nombres comme valeur spéciale de certaines fonctions holomorphes en des points algébriques. Hilbert s'intéressait à l'existence de fonctions jouant pour un corps de base K quelconque le rôle joué par la fonction exponentielle lorsque $K = \mathbb{Q}$ ou par les formes modulaires lorsque K est quadratique imaginaire. En dehors de ces deux cas et des travaux de Shimura-Taniyama dans le cadre des corps CM, les fonctions transcendantes attendues font défaut, ainsi que les résultats d'algébricité.

La conjecture de Stark constitue une réponse partielle à ce problème : elle prédit essentiellement que le logarithme de la valeur absolue d'une certaine unité coïncide avec la valeur spéciale d'une fonction L en $s = 0$. On peut noter quelques différences avec la problématique de Hilbert :

1. pour changer d'unité on doit changer de fonction L;
2. on évalue toujours la fonction L en le même point $(s = 0)$;
3. on récupère seulement le module de l'unité de Stark, et pas son argument.

Dans un travail en collaboration avec Henri Darmon ([C-D]), nous avons obtenu une formule analytique qui, sous forme conjecturale, devrait permettre de récupérer non seulement le module de l'unité de Stark mais aussi son argument. Cette formule fait apparaître une fonction holomorphe unique, en l'occurrence la primitive d'une série d'Eisenstein de poids 2, "évaluée" en des points algébriques. Nous proposons ainsi une construction des unités de Stark qui les rapproche du $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. Cette construction fait apparaître une généralisation de la notion d'unité modulaire dans le contexte des formes modulaires en plusieurs variables.

L'outil nouveau que nous avons introduit pour progresser dans la compréhension du problème de Hilbert et de la conjecture de Stark est la généralisation à un corps de nombres totalement réel F de la fonction Φ_R de Rademacher définie sur $SL_2(\mathbb{Z})$, et donc des sommes de Dedekind originelles.

Par ailleurs, on sait que la fonction de Rademacher classique coïncide avec une liste d'invariants numériques associés à une pointe d'une *surface modulaire* : les invariants de Hirzebruch, de Atiyah-Singer et ceux de Shimizu. Seuls ces trois derniers invariants avaient pour l'instant une généralisation en dimension supérieure. Ils se rattachent à la conjecture de Hirzebruch, démontrée par Atiyah-Donnelly-Singer [A-D-S] : ces trois nombres sont en fait égaux et rationnels.

Dans notre travail, nous avons introduit un quatrième invariant $\mathcal{D}$ qui joue en dimension supérieure le rôle joué par la fonction de Rademacher pour les surfaces modulaires. Il coïncide lui aussi avec les trois invariants précédents. Le "raffinement" de la conjecture de Stark que nous avons proposé a également des conséquences sur les dénominateurs de ces nombres rationnels.

2 Résultats classiques

On rappelle le cadre classique des résultats que nous étendons.

Le logarithme de la fonction η de Dedekind est défini sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par

$$\ln \eta(z) := \frac{i\pi}{12} z - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2i\pi mnz}}{m}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $c \neq 0$. Si on note ln la branche principale du logarithme, la fonction $\ln \eta$ vérifie la formule de transformation modulaire

$$\ln \eta(Az) = \ln \eta(z) + \frac{1}{4} \ln\left(-(cz+d)^2\right) + \frac{i\pi}{12} \Phi_R(A) \tag{1}$$

où $\Phi_R(A)$ est un entier qui ne dépend que de A.

La fonction $\Phi_R : SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, appelée *fonction de Rademacher*, est un *invariant cohomologique* du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Elle permet d'étudier les *sommes de Dedekind*, et notamment d'établir leur loi de réciprocité. Pour une matrice A donnée, les sommes de Dedekind permettent le calcul explicite de la valeur de $\Phi_R(A)$.

En outre, comme $\ln \eta(z)$ est une primitive de la série d'Eisenstein E_2, l'invariant $\Phi_R(A)$ peut être interprété comme une *période* de cette "forme modulaire de poids 2".

Le point crucial est que la fonction Φ_R permet de calculer la valeur en $s = 0$ de certaines fonctions L de Hecke. Donnons la présentation due à M. Atiyah de ce résultat.

Soit A une matrice hyperbolique de $SL_2(\mathbb{Z})$, et K le corps quadratique réel obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ ses valeurs propres. Atiyah [At] associe à cette matrice une fonction $L_A(s)$ qui consiste essentiellement en une fonction L de Hecke-Shimizu partielle du corps K. Il démontre en adaptant un résultat de C. Meyer ([Me]) l'égalité

$$L_A(0) = \Phi_R(A)/6 - \operatorname{sign}(c \operatorname{tr}(A))/2. \tag{2}$$

Les techniques utilisées reposent sur la formule limite de Kronecker et une "astuce" fameuse introduite par Hecke.

Remarque 2.1. L'identité précédente montre que $L_A(0)$ est un nombre rationnel dont le dénominateur divise 6.

Par ailleurs, les travaux de Hirzebruch [Hi] montrent que cet invariant $L_A(0)$ coïncide également avec la somme des termes du développement en fraction continue périodique du point fixe de A, mais aussi avec le "défaut de signature" qu'il a introduit. Ce dernier invariant numérique est de nature topologique. Il est attaché à une pointe de la surface modulaire de Hilbert correspondant à un certain sous-groupe de $SL_2(\mathcal{O}_K)$.

3 Résultats obtenus.

Dans notre article [Ch] et notre thése [Ch1], nous avons démontré plusieurs formules qui généralisent l'identité (2) lorsque K est une extension quadratique d'un corps F totalement réel de nombre de classes 1.

Nous en donnons un premier exemple. On note n le degré de F sur $\mathbb{Q}$, $\{\iota_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ l'ensemble des plongements réels de F, et R_F son régulateur. En étudiant précisément les fonctions de Konno-Asai qui apparaissent dans la formule limite de Kronecker généralisée pour le corps F (voir [As]), nous associons à chaque plongement ι_j une fonction

$$\Phi_j : SL_2(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{H}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

analogue de la fonction Φ_R de Rademacher.

Dans un premier temps, nous utilisons cet analogue pour définir des sommes de Dedekind associées au corps F et établir leurs principales propriétés. Nous démontrons notamment qu'elles satisfont une loi de réciprocité, ce qui permet de les exprimer toutes en fonction de la somme $s(0, 1; .)$ et d'un terme élémentaire. Nous étudions en outre leurs propriétés sous l'action de certains opérateurs de Hecke. Nous démontrons qu'elles sont des fonctions propres des opérateurs T_p, p premier totalement positif de $\mathcal{O}_F$, la valeur propre associée étant $N_{F/\mathbb{Q}}(p) + 1$. Ces résultats sont l'objet du chapitre 4 de la thèse, et constituent l'essentiel de l'article [Ch2].

Nous avons ensuite généralisé la formule (2) de la manière suivante. Soit A une matrice de $SL_2(\mathcal{O}_F)$. On note $A_j = \iota_j(A)$, et on suppose que la matrice A_1 est hyperbolique, tandis que $A_2, \ldots, A_n$ sont elliptiques. On désigne par ω_c le point fixe $(\omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathcal{H}^{n-1}$ des composantes elliptiques. Les valeurs propres de A engendrent une extension quadratique K de F de signature $(2, n-1)$.

Comme dans la situation classique, on peut associer à la matrice A une fonction L, essentiellement une fonction L de Hecke-Shimizu partielle du corps K. Cette fonction se prolonge en une fonction entière qui satisfait une équation fonctionnelle. Nous démontrons alors le théorème suivant (th. 5.3.12 p. 119) :

Théorème 3.1.

$$\frac{L_A^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} = R_F\Big(2^n \Phi_1(A,\, \omega_c) - 2^{n-2}\,\mathrm{sign}(c_1 \mathrm{tr}(A_1))\Big). \tag{3}$$

On se limite dans toute la suite au cas $n = 2$. La nature arithmétique du membre de gauche de (3) est alors gouvernée par la conjecture de Stark.

Conjecture 1 (Stark)**.** *Soit H le corps de classes d'anneau de K correspondant à la matrice A. On fixe une place de H au-dessus de la place complexe de K. Alors il existe une unité u_A de H telle que*

$$L'_A(0) = \ln |u_A|$$

à multiplication par un rationnel près.

Cette conjecture régit donc également la nature de l'invariant $\Phi_1(A,\, \omega_c)$.

Pour énoncer notre deuxième exemple de généralisation de la formule (2), nous devons introduire le 2-cocycle $\kappa^{Eis} \in \mathcal{Z}^2(SL_2(\mathcal{O}_F),\, \mathbb{C})$ attaché à la série d'Eisenstein de poids $(2,2)$:

$$\kappa^{Eis}_{\tau_1,\tau_2}(A,\, B) := \frac{1}{\sqrt{d_F}} \left(\int_{z_1}^{A_1 z_1} \int_{A_2 z_2}^{A_2 B_2 z_2} E_2(z_1,\, z_2) dz_1 dz_2 \right), \tag{4}$$

où τ_1 et τ_2 sont deux points-base arbitraires du demi-plan de Poincaré. La classe de κ dans $H^2(SL_2(\mathcal{O}_F),\, \mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de ces points.

Considérons maintenant deux matrices A et B qui engendrent un sous-groupe abélien de rang 2 de $SL_2(\mathcal{O}_F)$. Leurs valeurs propres engendrent une extension quadratique *totalement réelle* K de F. Nous attachons une fonction $L(A, B; s)$, essentiellement une fonction L de Hecke-Shimizu pour un module sur un ordre de K.

Nous démontrons alors ([Ch1],théorème 5.3.15) que la valeur spéciale en $s = 0$ de cette fonction vérifie

$$L(A, B; 0) = \pm \left(\kappa^{Eis}(A,\, B) - \kappa^{Eis}(B,\, A) \right).$$

Nous notons au passage que la valeur spéciale $L(A,\, B;\, 0)$ fait partie de la famille d'invariants étudiés par Hirzebruch-Atiyah-Singer [A-D-S]. Il est donc naturel d'ajouter l'invariant $\mathcal{D}(A,\, B) := \kappa^{Eis}(A,\, B) - \kappa^{Eis}(B,\, A)$ à cette liste comme un analogue en dimension supérieure de la fonction Φ_R de Rademacher. Nous fournissons dans notre thèse quelques exemples de calculs numériques de ces invariants au moyen des périodes que nous avons introduites. Les résultats, exposés au chapitre 6.3.2, ont été obtenus au moyen du logiciel PARI/GP.

4 Recherche en cours

Nous nous proposons d'étudier un invariant plus fin que $\Phi_1(A,\,\omega_c)$: nous le relevons en un invariant $\widetilde{\Phi}_1(A,\,\omega_c)$ élément de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$, [Ch1] chapitre 6. La conjecture que nous formulons ([Ch1] conjecture 2 p. 146) prédit que $\widetilde{\Phi}_1(A,\,\omega_c)$ coïncide essentiellement avec

$$\ln u = \ln |u| + i\mathrm{Arg}(u) \in \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\widetilde{\Phi}_1(A,\,\omega_c)$ doit permettre de récupérer à la fois la valeur absolue de l'unité de Stark mais aussi *son argument.*

Cet invariant d'un type nouveau est défini à partir du cobord qui scinde les périodes κ^{Eis} de la série d'Eisenstein de poids 2 pour $SL_2(\mathcal{O}_F)$. Il permet d'obtenir une généralisation des unités modulaires. Les unités algébriques correspondantes seraient effectivement réalisées comme des valeurs spéciales en des points algébriques de fonctions holomorphes, conformément au programme fixé par Hilbert.

Toute cette construction fait l'objet d'un article [C-D] en collaboration avec Henri Darmon. Le 2-cocycle κ^{Eis} est d'abord analogue aux périodes de formes modulaires de Hilbert paraboliques de poids (2, 2) considérées précédemment par Darmon ([Da1], [Da2], [D-L]). Rappelons que ces périodes l'ont conduit à une construction de points de Stark-Heegner sur les courbes elliptiques définies sur F.

On peut également interpréter notre travail comme un analogue archimédien de la construction p-adique d'unités de Stark obtenue par Darmon-Dasgupta dans [D-D]. Ce dernier article utilise de manière cruciale les propriétes p-adiques des sommes de Dedekind classiques, et leur loi de récirpocité. Nous souhaitons vivement étudier comment elles se généralisent en dimension supérieure.

Exemples numériques soutenant la conjecture principale.

Nous avons implémenté sur PARI un algorithme qui permet de calculer numériquement les invariants complexes $u_A = \exp(\widetilde{\Phi}_1(A,\,\omega_c))$ pour une matrice A à coefficients dans $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Nous pouvons ainsi tester notre conjecture qui prédit que ce sont des images complexes d'unités algébriques.

Voici un exemple typique :

Considérons le corps ATR biquadratique $K = F(\sqrt{21y - 11})$, où y désigne le nombre d'or. Son groupe des classes au sens restreint est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Notons g un générateur de ce groupe.

A chaque classe d'idéaux g^j, $(0 \leq j \leq 3)$, nous associons une matrice $A_j \in SL_2(\mathcal{O}_F)$ selon la procédure décrite en 6.1.1 de [Ch1]. On trouve les quatre matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4y+2 & -2y-5 \\ -2y-1 & 2y+1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 13y+9 & 4y+1 \\ -32y-18 & -7y-6 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -47y-17 & 9y-6 \\ -520y-308 & 53y+20 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 165y+79 & 5y-2 \\ -8512y-5160 & -159y-76 \end{pmatrix}.$$

Les invariants u_{A_j} sont respectivement

u_{A_0} =-6178.9132794195191078840192754251202309640698201926,

u_{A_1} =-0.97526881659178236272545890629970423680946145654728 + 0.221022024657418 19188053692546147331867830363475172*I,

u_{A_2} =-0.00016184075658267621240378326975605896613905728628499,

u_{A_3} =-0.97526881659178236272545890629970423680946145654728 - 0.221022024657418 191880536925461473318678303634751 72*I.

Noter que u_{A_1} et u_{A_3} ne sont pas réels. On obtient donc des invariants plus fins que ceux donnés par la conjecture de Stark classique, qui se limiteraient à $|u_{A_j}|$.

Noter également que, au moins numériquement, on a les identités remarquables $u_{A_0} = 1/u_{A_2}$ et $u_{A_1} = \overline{u_{A_3}}$.

Finalement, la commande algdep$(u_{A_j}, 8, 50)$ de PARI retourne un polynôme de degré 8 à coefficients entiers dont une des racines coïncide avec u_{A_j} à une précision de 50 décimales.

On trouve le même polynôme pour les 4 invariants :

$$P(X) = X^8 + 6179X^7 + 535X^6 - 5184X^5 - 1381X^4 - 5184X^3 + 535X^2 + 6179X + 1.$$

Nos 4 invariants coïncident donc sur 50 décimales avec 4 conjugués galoisiens de P. Il n'est pas difficile de voir que P est le polynôme minimal d'une unité du corps de classes de Hilbert de K, comme le prédit notre conjecture.

5 Développements attendus

Nous envisageons de donner une construction algorithmique nouvelle de corps de classes de corps ATR K, basé sur les symboles modulaires pour le groupe modulaire de Hilbert. Il se peut que cette nouvelle méthode soit plus efficace que les algorithmes actuellement en place sur le logiciel PARI. Notons que pour l'instant, les algorithmes implémentés par Roblot (Lyon 1) sont basés sur la conjecture de Stark classique et se limitent pour l'essentiel à une extension K totalement réelle.

Un autre projet ambitieux consiste à étendre nos résultats et conjectures au cas où le corps K est une extension quadratique de F de *signature* $(s,\, t)$ *arbitraire*. Pour ce faire, on peut considérer une *fonction* modulaire f de poids $(2, \ldots, 2, 0, \ldots, 0)$ (avec s fois 2 et t fois 0). On construit alors les périodes de cette fonction f selon le formalisme introduit dans notre travail. Pour certaines fonctions f bien choisies, on espère donner une construction conjecturale de points algébriques d'une extension abélienne de K. Ceci permettrait de répondre de manière plus générale au $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert en faisant "l'interpolation" entre la construction que nous avons donnée lorsque K est de signature $(2n-2,\, 1)$ et les travaux de Shimura-Taniyama dans le cadre CM. Noter que dans le cas d'un corps quadratique imaginaire, on dispose déjà de sommes de Dedekind, proposées par R. Sczech.

Nous souhaitons obtenir une démonstration du théorème 4.1 qui donne une borne pour la constante entière e_F, notamment en vue du corollaire 4.1 mais également pour limiter la taille des unités obtenues. En effet, des tests numériques et théoriques conduisent à penser que cette constante est le dénominateur de $\zeta_F(-1)$. La preuve du théorème 4.1 que nous possédons actuellement ne permet pas d'obtenir de borne.

Par ailleurs, il semble que les résultats de ma thèse puissent avoir un analogue dans le cas des groupes symplectiques. Il faudrait dans ce cas utiliser les formes modulaires de Siegel à la place des formes modulaires de Hilbert. Une telle construction doit être reliée aux invariants des groupes symplectiques introduits par Barge et Ghys [B-G].

Un autre point digne d'intérêt est le lien qui existe entre nos conjectures et la famille d'invariants numériques de nature géométrique cités précédemment (voir également l'annexe de [Ch1]). Nous souhaitons tirer profit de notre nouvelle interprétation des invariants de Hirzebruch-Atiyah et en étudier les conséquences au vu des théorèmes A.4.1 et A.4.3 de [Ch1].

6 Résumé du projet de recherche

1. Etendre notre réponse conjecturale au $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert au cas d'une extension quadratique de signature quelconque.
2. Donner une démonstration du théorème 4.1 qui borne les dénominateurs des classes "Eisenstein" dans la cohomologie du groupe modulaire de Hilbert.
3. Etendre notre construction automorphe de sommes de Dedekind au cas du groupe symplectique et des formes modulaires de Siegel.
4. Etudier plus précisément le lien entre notre nouvel invariant $\mathcal{D}$ et les invariants de Hirzebruch-Atiyah-Singer-Shimizu.

5. Généraliser en dimension supérieure les propriétés p-adiques des sommes de Dedekind classiques utilisées dans [D-D] pour attaquer la conjecture de Gross-Stark.

Références

[As] Asai, T. : *On a certain function analogous to* $\log|\eta(z)|$. Nagoya Math. J. **40**, 193-211 (1970).

[At] Atiyah, M. F. : *The logarithm of the Dedekind* η*-function.* Math. Ann. **278**, 335-380 (1987).

[A-D-S] Atiyah, M. F., Donnelly, H., Singer, I. M. : *Eta invariants, signature defects of cusps and values of L-functions.* Annals of Mathematics **118**, 131-177 (1983).

[B-G] Barge, J., Ghys, E. : *Cocycles d'Euler et de Maslov.* Math. Ann. **294**, 235-265 (1992).

[Ch1] Charollois, P. : Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2004.

[Ch2] Charollois, P. : *Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement réel.* Journal de Crelle **610**, 125-147 (2007).

[C-D] Pierre Charollois, Henri Darmon : *Argument des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein.* Soumis

[Coo] Cooke, G. : *A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory, Part I.* J. Reine Angew. Math. **282**, 133-156 (1976).

[Da1] Darmon, H. : *Integration on* $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$. Annals of Mathematics (2) **154**, 589-639 (2001).

[Da2] Darmon, H. : Rational points on modular elliptic curves. CBMS Regional Conference Series **101**. Conf. Board Math. Science, Washington D.C. AMS, Providence, RI : 2004.

[D-D] Darmon, H., Dasgupta, S. : *Elliptic units for real quadratic fields.* Annals of Mathematics (2) **163** 301-345 (2006).

[D-L] Darmon, H., Logan, A. : *Periods of Hilbert modular forms and rational points on elliptic curves.* Int. Math. Res. Not. **40**, 2153-2180 (2003).

[Hi] Hirzebruch, F. : *Hilbert modular surfaces.* Enseign. Math. **19**, 183-281 (1973).

[Ma] Mazur, B. : *On the arithmetic of special values of L Functions.* Invent. Math. **55**, 207-240 (1979).

[Me] Meyer, C. : Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern. Akademie-Verlag, Berlin : 1957.