Paris, le 20 septembre 2002

Albert Burroni dans l'école d'Ehresmann.

Constructivisme et structuralisme.

par Pierre Ageron (Caen)

L'objet de cette conférence est d'analyser les premiers travaux mathématiques d'Albert Burroni sous divers angles (historique, épistémologique, technique).

1. Vous savez que c'est sous la conduite de **Charles Ehresmann** qu'Albert a fait ses premiers pas dans la recherche. Lorsqu'Ehresmann, professeur à l'Université Paris 7, a pris sa retraite en 1975, il était devenu victime d'un certain ostracisme et l'événement n'a pas été marqué par une petite fête comme celle d'aujourd'hui. Je saisis donc l'occasion de présenter quelques aspects de sa pensée mathématique, sans lesquels il est difficile de saisir le sens des travaux d'Albert. Ce paragraphe résume une partie d'une étude en préparation sur la théorie ehresmannienne des structures.

Je souligne d'abord qu'Ehresmann n'a pas la vocation d'un marginal des mathématiques. Normalien très attaché à son école ainsi qu'à son maître Élie Cartan (le seul mathématicien français de l'ancienne génération bénéficiant du respect des « jeunes Turcs » des années 30), dont il poursuit l'œuvre de refondation de la géométrie différentielle, c'est tout naturellement qu'il est en 1935 l'un des neuf membres fondateurs de Bourbaki. Mais s'il partage pleinement l'idéal de structuration et d'unification de la mathématique qui caractérise le groupe, il se singularise en croyant possible et nécessaire une définition précise de la notion générale de structure, susceptible de développements théoriques : il le dit en 1939 devant Cavaillès et Lautman [Ehresmann 1946]. Or bien des membres du groupe ne sont pas convaincus et considèrent que l'idée de structure fait partie des « notions premières » [Beaulieu 1989, p. 329]. Jean Dieudonné a ainsi résumé les choses :

> « Dès avant 1940, il rêvait d'une théorie abstraite de toutes les espèces de structures possibles, ce qui rencontrait quelques réticences au sein du groupe Bourbaki. » [Dieudonné 1984]

On doit cependant constater que la première publication de Bourbaki, le fascicule de résultats de *Théorie des ensembles* [Bourbaki 1939], s'achève bel et bien (dans son paragraphe 8) sur un essai de définition générale des « structures » et « espèces de structures ». Quel a été le rôle d'Ehresmann dans l'élaboration de cette définition ? Selon sa deuxième épouse Andrée Charles-Ehresmann, « il a beaucoup participé à sa formulation » [A. Ehresmann 1980, p. 823]. Mais selon le témoignage d'André Weil recueilli par Liliane Beaulieu, le fascicule a essentiellement été rédigé par Delsarte et Dieudonné, avec la collaboration ponctuelle de Cartan

[Beaulieu 1989, p. 331]. Vu l'insistance d'Ehresmann sur la notion de structure, j'ai quand même du mal à croire qu'il ne se soit pas fortement impliqué dans l'affaire : l'ouverture prochaine des archives de Bourbaki devrait aider à préciser ce point.

Quoi qu'il en soit, cette notion de structure, reprise dans le traité complet [Bourbaki 1957], n'a cessé de susciter des commentaires sévères de la la grande majorité des commentateurs : « une définition horrible » [Lambek 1968, p. 156], « compliquée et inefficace » [MacLane 1983], « peu maniable et d'un emploi difficile » [Patras 2001, p. 130], « la partie la plus laide de son œuvre » [Béziau 2002, p. 51], « un monstre et un outil inutilisable » [Cartier 2003, p. XXVII], etc. Je pourrais multiplier les citations. Ce genre de jugement, a pris, on le voit, un caractère assez automatique. Le paradoxe est qu'elles expriment le fond de la pensée du groupe Bourbaki, les « réticences » dont Dieudonné a fait état devenant d'ailleurs explicites lors la troisième édition du fascicule de résultats, en 1958 :

> « [...] il ne semble guère possible d'énoncer des définitions générales et précises concernant les structures, en dehors du cadre de la Mathématique formelle. »

Je souhaite présenter une défense de la tentative bourbakiste de 1939, que l'on doit considérer comme un acte de recherche et non une mise au net d'idées antérieures. S'il est exact qu'*au sein du traité*, « elle ne joue pas de rôle mathématique significatif » [Corry 1996, p. 334], elle a connu *hors Bourbaki* une remarquable postérité qui plaide pour elle. On y voit apparaître deux idées-clefs :

— celle de transport de structure (par bijection),

— celle de construction de structure (via l'échelle des ensembles).

Or ce sont exactement ces deux idées, convenablement réinterprétées, qui sont à la base de la théorie générale des structures élaborée par Ehresmann à partir de 1957, dans le langage de la théorie des catégories d'Eilenberg-MacLane (contrairement à ce qu'on croit parfois, cette dernière n'est pas, en soi, une théorie des structures). Comme il est clairement expliqué dans l'introduction du livre *Catégories et structures* [Ehresmann 1965, p. vii], la théorie catégorique des structures associe deux points de vue complémentaires :

1– Le *point de vue algébrique*, ou théorie axiomatique des espèces de structures, généralise en termes de catégories d'opérateurs l'idée de transport de structure ([Ehresmann 1957], [Ehresmann 1965]). À noter que l'interprétation combinatoire des séries entières proposée par Joyal dans un article célèbre se réclame explicitement d'Ehresmann et de ce point de vue [Joyal 1981, p. 1].

2– Le *point de vue constructif* m'intéressera ici davantage. Il s'agit d'élaborer des méthodes de définition de structure sur des objets d'une catégorie arbitraire. Assez naturellement, Ehresmann songe d'abord à fonctorialiser la technique de Bourbaki : c'est la *méthode des foncteurs types* [Ehresmann 1960], à laquelle plusieurs de ses élèves donnent ensuite de beaux développements dans un esprit de plus en plus catégorique — voir [Guitart 1979] pour un résumé. Elle est cependant insuffisamment universelle pour pouvoir, comme le réclament les mathématiques depuis la fin des années 1950, structurer des objets d'une catégorie arbitraire. Ehresmann est alors conduit à imaginer *la méthode des esquisses* : [Ehresmann 1966], [Ehresmann 1968]. Inspirée par la notion de « type » ([Bénabou 1968a]), qui généralise elle-même celle de « théorie algébrique » ([Lawvere 1963]), la notion d'esquisse y ajoute deux idées supplémentaires fortement nouvelles :

• définir les structures par des propriétés universelles beaucoup plus générales que les produits : limites projectives et/ou limites inductives quelconques,

• accomplir ces définitions dans un formalisme minimaliste de caractère axiomatique : il ne s'agit pas de prétendre décrire une théorie achevée, mais une présentation de théorie, comme c'est le cas dans la pratique des mathématiques.

Qu'est-ce qu'une esquisse ? On commence par définir une notion de **néocatégorie**, alias **graphe multiplicatif**, qui généralise celle de catégorie en ne supposant pas que deux flèches consécutives ont nécessairement une composée (tout objet a néanmoins une identité). Une esquisse σ est alors une néocatégorie dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs (non nécessairement discrets). On définit une réalisation de σ dans une catégorie $\mathbb{H}$ comme un foncteur de σ vers $\mathbb{H}$ envoyant chaque cône projectif (resp. inductif) distingué sur une limite projective (resp. inductive) dans $\mathbb{H}$. On dit d'une catégorie qu'elle est esquissable si elle est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse σ dans la catégorie des ensembles.

La définition d'une esquisse a en réalité connu de nombreuses variations. En voici un exemple : dans [Ehresmann 1966] et [Ehresmann 1968], une esquisse comporte (en plus des ingrédients précédents) des flèches distinguées, que les réalisations doivent envoyer sur des monomorphismes ; par la suite, cette donnée s'est avérée inutile, des cônes projectifs particuliers pouvant jouer le même rôle. D'autres variations, liées à la taille des données, seront analysées plus loin.

Les premiers exemples d'esquisses apparaissent dans [Ehresmann 1966]. Y est ainsi dessinée une esquisse dont les réalisations ensemblistes s'identifient aux catégories (petites) : cette esquisse (aujourd'hui gravée sur la tombe d'Ehresmann) permet de définir aisément les catégories dans une catégorie arbitraire. Le même article décrit brièvement une esquisse dont les réalisations ensemblistes sont les corps : on a là le tout premier exemple d'une esquisse « mixte », c'est-à-dire avec co-présence de cônes projectifs et de cônes inductifs.

Parmi les nombreuses thèses de troisième cycle dirigées par Ehresmann vers 1970, beaucoup portent sur les esquisses : [Burroni 1970t], [É. Burroni 1970t], [Lair 1970t], [F. Conduché 1971t], [Barthélémy 1971t]. Par la suite, c'est surtout Ch. Lair qui développe la théorie des esquisses, collaborant successivement avec F. Foltz, R. Guitart, L. Coppey. La théorie s'internationalise à partir du milieu des années 1980 et représente aujourd'hui un corps de doctrine considérable — sur lequel manque encore une synthèse.

La notion d'esquisse illustre une caractéristique de la pensée d'Ehresmann : la volonté d'élever au rang de concept ce qu'on voyait auparavant comme présentation, non intrinsèque, d'un type de structure. Une démarche qui a été sévèrement jugée : Jean Bénabou par exemple estime que « le type est le "vrai" objet mathématique » [Bénabou 1968a] et critique le « manque d'élégance » et le « défaut d'invariance » des notions non intrinsèques (sans il est vrai explicitement mentionner les esquisses) [Bénabou 1968b]. C'est en effet une option philosophique neuve et forte que d'accorder un statut d'*objet algébrique de premier plan* à des systèmes, *a priori* peu ou pas structurés, de générateurs et relations. C'est le cas des néocatégories : elles sont des présentations de catégories, mais aussi pour Ehresmann des structures fondamentales par elles-mêmes. Le choix, rare et audacieux, du préfixe *néo*, préféré aux habituels *pré, semi, para, quasi, pseudo,* ..., en est une confirmation éclatante. C'est le cas des esquisses : elles sont des présentations de types de structures, de théories mathématiques. Dans ce cas, c'est le mot même d'esquisse, à mon avis grande réussite terminologique, qui montre l'importance accordée à la notion.

Dans cette attitude, je crois retrouver un écho de la critique intuitionniste. Il s'agit de répondre à des questions comme : que sont les mathématiques sinon la construction progressive, jamais achevée, de théories à partir de présentations axiomatiques ? le type, objet déductivement clos, a-t-il une réalité autre qu'idéale ? et est-on fondé à identifier deux présentations aussi longtemps que l'on n'a pas représenté l'une dans une extension de l'autre ? La considération de structures algébriques affaiblies ou partielles lui permet de rendre compte mathématiquement de la construction progressive d'une structure, et d'échapper au vertige tautologique menaçant l'algèbre universelle. Or ces structures faibles, chères par exemple à un Krasner, ont été bannies par l'idéologie dominante du vingtième siècle au nom de l'élégance ou de l'économie conceptuelle, certes éminemment désirables, mais rarement acquises dès le départ. Mais du point de vue des mathématiques constructives, l'idée de fonction partielle est essentielle, et il en va de même pour un point de vue constructif sur les structures. Ehresmann entreprend ainsi, avec ses élèves, *la constructivisation de la méthode structurale à l'intérieur d'elle-même*. Je suis frappé par son utilisation dans [Ehresmann 1966] du mot *idée*, qui désigne la genèse d'une construction (le mot est repris dans [Lair 1971a]). Mieux : Ehresmann formalise une notion d'*idée constructive*, qu'il abrège en *Idée*, avec une majuscule suggérant un retranchement du platonisme dans les petits dessins. Les noms donnés aux différents concepts mis au point dans l'école d'Ehresmann (esquisse, idée, prototype, maquette, ébauche, trame, canevas...) révèlent la quête d'une écriture archaïque des choses, de signes graphiques susceptibles d'être soumis au calcul formel. Ce « constructivisme structural » est vraiment, surtout dans les années 1960-70, un mode de pensée extrêmement original. Cela est une des explications de la rapide et considérable marginalisation nationale et internationale d'Ehresmann, puis de celle du groupe d'élèves resté fidèle au « point de vue systématiquement constructif des esquisses » [Lair 1971a].

2. La thèse de 3e cycle d'Albert Burroni s'intitule *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies* [Burroni 1970t] ; elle a été en partie résumée dans deux notes aux *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* : [Burroni 1970a], [Burroni 1970b]. La soutenance s'est déroulée le 30 juin 1970 : le jury, présidé par Charles Ehresmann, était composé d'Andrée Bastiani, rapporteur de la thèse et future épouse d'Ehresmann, ainsi que de Michel Lazard et Peter Hilton, deux mathématiciens à qui l'on doit des réflexions très précoces sur la notion générale de structure (notion d'analyseur dans [Lazard 1955], "group-like structures" dans [Eckmann-Hilton 1962]).

La thèse d'Albert est d'abord une première synthèse, remarquablement claire, de l'état de la théorie des esquisses en 1970. On note que la classe de flèches distinguées (devant se réaliser en monomorphismes) est toujours présente parmi les données d'une esquisse. Comme dans les textes d'Ehresmann, l'accent mis sur l'aspect constructif de la théorie est attesté par l'omniprésence du verbe "construire" et de ses dérivés, par exemple dans cette phrase :

> « si nous partons d'une esquisse déjà connue, nous en construirons une plus grande en parlant de *données supplémentaires*, c'est-à-dire en ajoutant de nouvelles données à celles déjà connues. » [Burroni 1970t, p. 4].

Le travail d'Albert a aussi, et surtout, consisté en une étude d'exemples. Dans ces temps pionniers, il importait en effet d'évaluer le pouvoir expressif du formalisme des esquisses en agrandissant le corpus de structures esquissées. Parmi les exemples mémorables qu'il décrit, une « esquisse d'esquisse » apporte la preuve que le formalisme est suffisamment puissant pour s'autodécrire :

> « Les esquisses et les types sont des structures qui servent à définir des structures algébriques. En construisant leur esquisse, nous montrons qu'elles-mêmes sont des structures algébriques, ce qui permet d'en déduire leurs propriétés générales. » [Burroni 1970b, p. 449]

C'est surtout à l'« esquisse de topologie » que je m'intéresserai aujourd'hui. La structure d'espace topologique était vraisemblablement considérée comme un test critique pour la théorie des esquisses : c'est en effet l'exemple même de structure qui se décrit aisément « à la Bourbaki » ou en termes de foncteurs typiques, alors qu'il n'est pas évident qu'on puisse la définir par limites projectives et inductives. Assez curieusement, Ehresmann avait affirmé très tôt que c'est possible [Ehresmann 1966, p. 3], tout en se gardant bien de dire comment ! En 1970, Albert résout le problème :

> « On montre que les topologies peuvent être définies comme des structures algébriques : ce sont des réalisations d'une esquisse dans un type. Cette esquisse, construite en utilisant la notion de "typification", est à la fois projective et inductive. » [Burroni 1970a, p. 228]

Remarquons l'insistance sur le caractère mixte de l'« esquisse de topologie » : il semble qu'on l'ait jusqu'à ce jour tenu comme un fait mathématiquement significatif. À la fin de cette conférence, je vous montrerai que ce n'est pas le cas, car on peut la remplacer par une autre « esquisse de topologie » qui est, elle, purement projective. Je montrerai d'ailleurs qu'Albert est passé très près de cette construction !

Mais revenons au raisonnement qu'il tient en 1970. Lorsqu'on tente d'esquisser les topologies, une des difficultés de l'exercice tient au fait qu'on veut obtenir les applications continues comme transformations naturelles entre réalisations de l'esquisse. Il est donc exclu de décrire une topologie à partir de l'ensemble de ses ouverts : ce sont alors les applications ouvertes qu'on obtiendrait. Inspiré par l'esprit des quasi-topologies ("Limesraüme") de Kowalsky, auxquelles Ehresmann s'était aussi intéressé, Albert montre que se donner une topologie sur un ensemble E revient à se donner, entre l'ensemble $\mathbf{F}(E)$ des filtres sur E et l'ensemble E lui-même, une relation « de convergence » soumise à certains axiomes. Une application continue est alors une application qui préserve cette notion de convergence. Voici un système d'axiomes possible, parmi d'autres systèmes équivalents discutés par Albert. Les identificateurs des axiomes sont ceux qu'il utilise :

$\mathbf{T_2}$ *si* $F \to x$ *et si* $F \subset F'$, *alors* $F' \to x$

$\mathbf{T_1}$ $I_E(x) \to x$ *[*$I_E(x)$ *désignant le filtre principal associé à un point* x *de* E*],*

$\mathbf{T'_4}$ *si* $\Phi \to F$ *et si* $F \to x$, *alors* $K_E(\Phi) \to x$ *[*$K_E(\Phi)$ *désignant le filtre sur* E *obtenu en faisant la "somme" des éléments d'un filtre* Φ *sur* $\mathbf{F}(E)$*].*

En décrivant abstraitement cette situation, il obtient l'esquisse cherchée. Elle comporte entre autres un « objet des points » e, un « objet des filtres » $f(e)$, un « objet des filtres sur les filtres » $f(f(e))$, des flèches de e vers $f(e)$ et $f(f(e))$ vers $f(e)$ pour représenter les applications I_E et K_E, et un monomorphisme de but $f(e) \times e$ pour se donner la relation de convergence entre filtres et points. Il n'est pas difficile de traduire les axiomes ci-dessus, après quoi il ne reste guère qu'à « typifier » l'objet $f(e)$ comme ensemble des filtres sur e. Pour cela, Albert a l'idée de décomposer le foncteur $\mathbf{F} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ comme limite inductive canonique de foncteurs représentables et ajoute à l'esquisse les cônes projectifs (discrets) et le cône inductif nécessaires pour spécifier cette décomposition. Les réalisations ensemblistes de l'esquisse obtenue sont bien les espaces topologiques. À noter qu'Albert étudie aussi les réalisations *topologiques* de son esquisse, et conclut, apparemment un peu déçu :

> « Une "topologie topologique" n'est rien d'autre qu'un couple (π, π') de topologies au-dessus d'un même ensemble $\theta(\pi) = \theta(\pi')$ ». [Burroni 1970t, p. 65]. »

Telle est l'esquisse de topologie d'Albert. Si l'on consulte la bibliographie récente sur les esquisses, on peut être frappé du fait qu'elle n'y est jamais mentionnée. Plus troublant encore, la lecture de travaux devenus classiques permet de conclure qu'une telle esquisse n'existe pas ! En effet, une catégorie esquissable contient nécessairement un ensemble *dense* d'objets *présentables* [Lair 1981]. Mais ce n'est pas le cas de la catégorie $\mathbb{T}$op, où « les individus présentables sont exactement ceux qui sont discrets : une société exemplaire ! » [Gabriel-Ulmer 1971, S. 64].

Le paradoxe n'est bien sûr qu'apparent, et voici son explication. La définition standard des esquisses, depuis [Ehresmann 1968], requiert que les cônes distingués d'une esquisse spécifient des limites projectives ou inductives d'indexation **petite**. Avec les notations de l'époque (où $\mathcal{N}'_0$ désigne la classe des petites néocatégories) :

$$\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subset \mathcal{N}'_0$$

Or l'esquisse des topologies construite par Albert comporte un cône inductif d'indexation non petite. C'est ce qui l'a conduit à mettre un chapeau :

$$\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subset \widehat{\mathcal{N}'}_0$$

détail graphique qui indique qu'il a abandonné la restriction de taille sur les cônes, obtenant une notion d'esquisse beaucoup plus générale. Cette extension ne fait, curieusement, l'objet d'aucun commentaire, que ce soit dans sa thèse ou dans les notes aux *Comptes-rendus*. Il faut dire que le maître avait donné son feu vert : « Ce n'est pas la Bible, ma définition ! » ; dans ces conditions, se rappelle Albert, « je me sentais couvert ». J'ai relevé systématiquement les contraintes de taille imposées aux esquisses dans tous les articles de théorie des esquisses des années 1966-1975 : elles connaissent de nombreuses variations. On découvre par exemple que Christian Lair, dont l'objectif constant, atteint dans [Lair 1981], a été de caractériser les catégories esquissables, travaillait dans [Lair 1971b] avec la même notion d'esquisse généralisée qu'Albert Burroni, puis revint assez rapidement à des cônes d'indexation petite. C'est que la méthode de « typification » d'Albert était en un sens trop puissante : selon Lair, le Canadien Robert Paré suspectait dès cette époque que *toute* catégorie est esquissable par une esquisse dont on ne contrôle pas la taille — ce qu'il établira bien plus tard, sous l'hypothèse (plutôt faible) que les idempotents de la catégorie soient scindés [Makkai-Paré 1987, theorem 2.2.2.].

On pourrait en conclure que la partie de la thèse d'Albert relative à l'esquisse de topologie a ainsi perdu sa pertinence. Ce serait aller trop vite en besogne, car prouver l'esquissabilité d'une catégorie et construire une esquisse particulière sont deux choses bien différentes. Je m'en suis convaincu lorsque j'ai tenté de retrouver l'esprit de cette époque en esquissant *ab initio* certaines catégories essentiellement *petites* à idempotents scindés (l'esquissabilité d'une telle catégorie est assurée par la théorie). Ainsi, lorsque j'ai voulu esquisser la catégorie des extensions algébriques galoisiennes de $\mathbb{Q}$, j'ai utilisé la théorie de Galois-Krull-Grothendieck [Ageron 2001]. Indépendamment de cette théorie, la même esquisse (à isomorphisme près) résulte aussi de la connaissance de certaines propriétés abstraites de la catégorie, faciles à vérifier... à condition d'en connaître *a priori* la liste ! De la même façon, Albert a construit son esquisse en utilisant des outils mathématiques extérieurs (filtres), complètement étrangers aux méthodes générales de construction d'esquisses (qui n'ont été imaginées que dix ans plus tard par Lair, et ne conduisent pas à une esquisse canonique en général). Il me semble que la question de savoir ce que fait exactement le mathématicien qui esquisse un type de structures est fort délicate, et demanderait à être approfondie en croisant les approches psychologique et mathématique. Bien sûr, dans le système de pensée d'Ehresmann, le problème est éludé puisque l'esquisse est l'objet primitif : mais l'esquisse de topologie d'Albert est peu plausible en tant qu'écriture archaïque ou qu'objet syntaxique, tel qu'en utilise aujourd'hui l'informatique.

Concluons sur la thèse de 3e cycle d'Albert : elle renferme un travail sur la structure de topologie, sans aucun doute extrêmement significatif, mais qui, à l'époque de sa rédaction, n'a pas encore trouvé le cadre conceptuel qui lui donne vraiment sens. Une solution strictement mathématique sera apportée dès l'année suivante par Albert par lui-même.

3. J'en viens ainsi au long mémoire [Burroni 1971] qui s'intitule **T**-*catégories (Catégories dans un triple)*, et qui révèle à mon avis un mathématicien profond et original. En comparaison de [Burroni 1970t], il procède d'influences plus diversifiées ([Barr 1969], [Bénabou 1967], [Lambek 1969]) : j'y insisterai toutefois peu, car elles sont indiquées avec précision. Ce qui, paradoxalement, est peu explicité, laissant ainsi un espace au commentateur, c'est la filiation entre ce mémoire et la thèse soutenue l'année précédente. Du point de vue épistémologique, on peut analyser les choses ainsi. On a vu que l'esquisse de topologie n'est pas petite, donc peu satisfaisante du point de vue syntaxique. Albert en extrait la partie irréductible à des données petites pour la faire glisser de la syntaxe vers la sémantique. Ainsi, au lieu de voir les topologies comme des structures dans une catégorie (celle des ensembles), il propose de les voir comme des structures *dans un endofoncteur de cette catégorie*. Plus précisément, il lit les propriétés $\mathbf{T_1}$ et $\mathbf{T'_4}$ ci-dessus comme des axiomes de réflexivité et de transitivité « tordus » par $\mathbf{F}$, l'endofoncteur des filtres. En réalité, c'est $\mathbf{U}$, l'endofoncteur des ultrafiltres, qu'il privilégie maintenant : cela a pour effet de faire disparaître l'axiome $\mathbf{T_2}$ et lui permet d'interpréter une topologie comme un *préordre dans* $\mathbf{U}$. De plus, il note que dans la formulation des axiomes $\mathbf{T_1}$ et $\mathbf{T'_4}$ interviennent les transformations naturelles $I : \mathrm{id}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}} \to \mathbf{U}$ et $K : \mathbf{U} \circ \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ qui font de $\mathbf{U}$ un triple (j'utilise ici le mot *triple*, usuel à l'époque, pour désigner ce qu'on appelle plutôt aujourd'hui une *monade*) et est ainsi naturellement amené à s'intéresser aux préordres dans un triple $\mathbf{T}$ quelconque. C'est aussi l'idée de [Barr 1969], mais avec un point de vue différent, visible dans la terminologie : Barr parle d'*algèbres relationnelles* de $\mathbf{T}$ et non de préordres dans $\mathbf{T}$.

Le fait de considérer des préordres dans un triple est déjà un pas important, rompant avec l'idée que toute structure vit naturellement dans une catégorie. Albert va beaucoup plus loin. Dans une démarche apparemment assez spéculative, il pense à une structure plus générale que celle de préordre dans **T** : celle de *catégorie dans* **T** (en abrégé : **T**-*catégorie*). Comme il le remarque, cela revient à unifier la polysémie apparente du symbole sagittal $\rightarrow$, qui traditionnellement désigne aussi bien un *morphisme* dans une catégorie (c'est le cas où $\mathbf{T} = \mathrm{id}$) qu'une *limite* dans un espace topologique (cas d'un préordre dans $\mathbf{T} = \mathbf{U}$). Cette structure de **T**-catégorie, conjecturale, à proprement parler chimérique, Albert la synthétise par un moyen indirect : convoquant l'interprétation des catégories donnée dans [Bénabou 1967], il obtient d'abord une définition conceptuelle des **T**-catégories, possible a priori seulement dans le cas où le triple **T** est "cartésien". Puis il la déconstruit pour aboutir à une description explicite et globale, qui garde un sens dans le cas d'un triple non cartésien (comme celui des ultrafiltres). Cette description explicite des catégories dans un triple **T** est donnée dès le début de [Burroni 1971] : c'est la figure 1. On la voit aussi derrière Albert sur l'affiche de notre journée, dessinée avec talent par Jacques Penon (usant de sa liberté d'artiste, Jacques lui a fait subir une rotation d'angle $-\pi/4$). Dans la partie basse de la figure, l'œil exercé reconnaît, un peu déformée, l'esquisse de catégorie : π est l'objet des flèches, e est l'objet des objets, etc. — mais si la flèche « but » (notée b) va, très normalement, de π vers e, la flèche « source » (notée a) va de π vers Te ; ainsi est ménagé un espace, celui qui est nécessaire pour souder une image de l'« esquisse de triple » (bord gauche de la figure). Je suis revenu dans cette dernière phrase au langage des esquisses, mais une note de bas de page montre que telle était bien l'intention d'Albert :

> « Dans un travail ultérieur, nous considérerons la figure 1 comme "l'esquisse des **T**-catégories ", ces dernières n'étant que des "réalisations" de cette "esquisse" munie de "typifications" » [Burroni 1971, p. 232]

Je n'irai pas plus loin dans l'analyse de l'article, où se cachent beaucoup de remarques profondes. Je note avec intérêt que depuis quatre ou cinq ans, après un très long sommeil, la théorie des catégories dans un triple et les différents exemples donnés par Albert ne cessent d'être redécouverts. Voici quelques exemples.

L'interprétation des multicatégories de [Lambek 1969] donnée dans [Hermida 2000] est identique à celle d'Albert : ce sont les catégories dans le triple des monoïdes libres. Dans [Leinster 2000, 2.2.], on trouve une notion de **T**-*multicatégorie* qui coïncide exactement avec celle de **T**-catégorie d'Albert (mais Leinster ne travaille que dans le cas où **T** est cartésien). En particulier les `fc`-*multicatégories* de [Leinster 2000, 3.6.] sont exactement ce qu'Albert appelait simplement *multicatégories* [Burroni 1971, p. 276-285] : les catégories dans le triple des catégories libres. Quant aux *ultracatégories* de [Clementino-Tholen 200+], elles ne sont rien d'autre que ce qu'Albert appelait *hypertopologies* [Burroni 1971, p. 290-291] : les catégories dans le triple des ultrafiltres. Enfin les *polycatégories abstraites* de [Koslowski 2003] sont assez voisines des catégories dans une loi distributive **D**, généralisation des catégories dans un triple définies, cette fois, par Élisabeth Burroni [É. Burroni 1973] !

Comme annoncé, je terminerai par une remarque technique sans prétention (son seul mérite est sans doute de ne pas se trouver déjà dans les écrits d'Albert !) Exactement comme pour l'esquisse de topologie, les "typifications" font de l'esquisse de **T**-catégorie construite par Albert une esquisse *mixte*. Mais dans le cas (usuel) d'un triple **T** sur $\mathbb{E}$ns (ou bien sur une catégorie de préfaisceaux), *on peut esquisser les* **T***-catégories de manière purement projective* : ceci tient seulement au fait que les limites inductives dans $\mathbb{E}$ns sont universelles. On s'explique ainsi mieux que la catégorie des **T**-catégories possède toutes les limites projectives, ce qu'Albert a démontré « à la main » [Burroni 1971, p. 232-234]. La construction qu'il a donnée de ces limites revient d'ailleurs plus ou moins à la description d'une telle esquisse projective : il s'agit au fond de déterminer des foncteurs d'oubli adéquats pour lesquels cette construction se fait point par point. Une remarque analogue s'applique aux **T**-préordres et, en particulier, aux espaces topologiques : eux aussi sont les réalisations d'une certaine esquisse *projective* (non petite, bien sûr). Enfin, lorsque le triple **T** possède un rang, l'esquisse projective de **T**-catégorie n'a qu'un petit nombre de cônes : on obtient alors de surcroît l'existence des limites inductives dans la catégorie des **T**-catégories, ainsi que l'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur d'oubli des **T**-catégories vers les **T**-graphes, et même, en utilisant le critère syntaxique de [Lair 1975], la triplabilité de ce foncteur d'oubli.

Concluons sur [Burroni 1971]. Lorsqu'on le compare avec sa thèse, cet article révèle rapidement l'autonomisation de la pensée d'Albert vis à vis de son maître : il a en partie abandonné les notations qui lui étaient chères, il a étendu son horizon bibliographique, et les concepts du « structuralisme constructif » d'Ehresmann (en particulier celui d'esquisse) semblent absents. Et pourtant, à regarder les choses finement, l'esprit ehresmannien est présent, et même plus que dans la thèse. Conscient sans doute de la signification ambiguë de son esquisse de topologie du point de vue constructif, Albert a magistralement retourné la situation : il a d'un même coup restitué un statut clair au travail mathématique acccompli dans sa thèse, et créé la doctrine nouvelle et prometteuse des catégories dans un triple. Pour définir ces dernières même dans le cas non cartésien, il a travaillé implicitement avec une esquisse (on pense à la manière dont Ehresmann a su s'affranchir des produits fibrés pour définir les catégories différentiables). Il a du reste annoncé son prochain retour explicite aux esquisses (c'est par le biais des algèbres graphiques qu'il l'accomplira dans les années 1980). C'est enfin dans un esprit très proche de celui d'Ehresmann qu'il a suggéré une étude plus générale des structures dans un triple :

> « la notion de **T**-catégorie n'est qu'une "**T**-structure" parmi d'autres » [Burroni 1971, p. 320]

et même l'étude des structures dans une configuration catégorique autre qu'un triple (Élisabeth a par exemple étudié le cas d'une loi distributive [É. Burroni 1973]). Ainsi, trente ans plus tard, la veine ouverte par Albert Burroni dans les directions tracées par Charles Ehresmann me semble loin d'être épuisée.

BIBLIOGRAPHIE

AGERON (Pierre)

[2001] Limites inductives point par point dans les catégories accessibles, *Theory and Applications of Categories* 8 (2001), p. 313-323

BARR (Michael)

[1970] Relational algebras, in *Reports of the Midwest Category Seminar IV*, Lecture Notes in Mathematics 137, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1970, p. 9-55

BARTHÉLÉMY (Jean-Pierre)

[1971] *Esquisses pointées* (thèse de 3^e cycle), Esquisses mathématiques 12 (1971), 79 p.

BEAULIEU (Liliane)

[1990] *Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*, thèse de doctorat, Université de Montréal, 1990, deux volumes, 552 p.

BÉNABOU (Jean)

[1967] Introduction to bicategories, in *Reports of the Midwest Category Seminar I*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967, p. 1-77

[1968a] Structures algébriques dans les categories, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* 10 (1968), p. 1-126

[1968b] Catégories algébriques et théorie de la descente, Séminaire Dubreil-Pisot, 21e année, 1967/68, n° 14 (23 mars 1968), 2 p.

BÉZIAU (Jean-Yves)

[2002] La théorie des ensembles et la théorie des catégories : présentation de deux sœurs ennemies du point de vue de leurs relations avec le fondement des mathématiques, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* IX (2002), p. 45-53

BOURBAKI (Nicolas)

[1939] *Théorie des ensembles*, fascicule de résultats, Paris : Hermann, 1939, rééd. 1951, 1958, 1964

[1957] *Théorie des ensembles. Chapitre 4 : structures*, Paris : Hermann, 1957, rééd. revue et diminuée 1966, 1970

BURRONI (Albert)

[1970a] Esquisse de topologie, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)* 271 (1970), p. 228-230

[1970b] Esquisses de types : catégories munies de limites, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)*, 271 (1970), p. 449-452

[1970t] Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies (thèse de 3^e cycle), *Esquisses mathématiques* 5 (1970), 87 p.

[1971] **T**-catégories (Catégories dans un triple), *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XII (1971), p. 215-321

BURRONI (Élisabeth)

[1970] *Catégories discrètement structurées. Triples* (thèse de 3^e cycle), Esquisses mathématiques 5 (1970), 88 p.

[1973] Algèbres non déterministiques et **D**-catégories, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XIV (1973), p. 417-475

CARTIER (Pierre)

[2003] *Le défi post-hilbertien*, introduction à : J. Gray, *Le défi de Hilbert*, Paris : Dunod, 2003

CLEMENTINO (Maria) and THOLEN (Walter)

[2003] Metric, Topology and Multicategory A Common Approach, *Journal of Pure and Applied Algebra* 179 (2003), p. 13-47.

CONDUCHÉ (François)

[1971] Sur les structures définies par limites projectives (thèse), *Esquisses mathématiques* 11 (1971), 67 p.

CORRY (Leo)

[1996] *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Bâle : Birkhaüser, 1996

DIEUDONNÉ (Jean)

[1984] notice sur Charles Ehresmann, in *Annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure*, reproduit dans *Charles Ehresmann, œuvres complètes et commentées*, vol. I, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1984, p. XXI-XXIV

ECKMANN (Beno) and HILTON (Peter J.)

[1962] Group-like structures in general categories, *Mathematische Annalen* 145 (1962), p. 227-255 ; 150 (1963), p. 165-187 ; 151 (1963), p. 150-186

EHRESMANN (Charles)

N.B. Toutes les références ci-dessous à l'exception de [1946] et [1965] sont réimprimées dans *Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées*, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1980 à 1984

[1946] intervention lors de la discussion sur « La pensée mathématique » suivant la conférence commune d'Albert Lautman et Jean Cavaillès (4 février 1939), *Bulletin de la Société française de philosophie* XL (1946), réimpr. dans Jean Cavaillès, *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann, 1994

[1957] Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 60 (1957), p. 49-77

[1960] Catégorie des foncteurs types, *Rev. Unión Mat. Argent.* 20 (1960), p. 194-209

[1965] *Catégories et structures*, Paris : Dunod, 1965

[1966] *Introduction to the theory of structured categories*, University of Kansas, Department of Mathematics, Technical report 10 (1966) vii+88 p.

[1968] Esquisses et types des structures algébriques, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi XIV (1968), p. 1-14

GABRIEL (Peter) und ULMER (Friedrich)

[1970] *Lokal präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Mathematics 221, Berlin : Springer 1970

GUITART (René)

[1979] Foncteurs-types, équations de structures, univers algébriques, *Séminaire de catégories Guitart-Lair-Coppey, Foltz*, UER de mathématiques, Université Paris 7, 16 février 1979, exposé n° 9, 8 p.

[1980] Sur les contributions de Charles Ehresmann à la théorie des catégories *Gaeztte des mathématiciens* 13 (1980), p. 37-43, réimprimé dans *Charles Ehresmann, œuvres complètes et commentées*, vol. I, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1984

HERMIDA (Claudio)

[2000] Representable multicategories, *Advances in Mathematics* 151 (2000), p. 164-225

JOYAL (André)

[1981] Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Mathematics* 42 (1981), p. 1-82

KOSLOWSKI (Jürgen)

[2003] A monadic approach to polycategories, à paraître

LAIR (Christian)

[1970t] *Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées* (thèse de 3^e cycle), Esquisses mathématiques 2 (1970), 102 p.

[1971a] Idées et maquettes de structures algébriques, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XII (1971), p. 29-55

[1971b] Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie soit fortement ou très fortement spécifiable, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)* 273 (1971), p. 596-598

[1975] Esquissabilité et triplabilité, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XVI (1975), p. 274-279

LAMBEK (Joachim)

[1968] compte-rendu de la deuxième édition de [Bourbaki 1957], *Bulletin canadien de mathématiques* 11 (1968), p. 155-156

[1969] Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories, in : *Category Theory Homology Theory Appl.*, Proceedings of the Conference at Seattle Res. Center Battelle Mem. Inst. 1968, 1, Lectures Notes in Mathematics 86, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1969, p. 76-122

LAZARD (Michel)

[1955] Lois de groupes et analyseurs, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (III^e série) 72 (1955), p. 299-400

LEINSTER (Thomas)

[2000] *Operads in Higher-Dimensional Category Theory*, thèse, University of Cambridge, juillet 2000

MAC LANE (Saunders)

[1983] recension des *Oeuvres complètes et commentées de Charles Ehresmann*, volumes III-1 et III-2 (Amiens, 1984), *Mathematical Reviews*, 83e : 01090a (1983)

MAKKAI (Michael) and PARÉ (Robert)

[1989] *Accessible categories : the foundations of categorical model theory*, Providence : AMS, 1989

PATRAS (Frédéric)

[2001] *La pensée mathématique contemporaine*, Paris : PUF, 2001