

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit \mathcal{C} une catégorie. On définit l'« enveloppe de Karoubi » $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} de la façon suivante. Les objets de $\overline{\mathcal{C}}$ sont les couples (X, p) où X est un objet de \mathcal{C} et $p : X \rightarrow X$ une flèche telle que $p \circ p = p$, et une flèche de (X, p) vers (Y, q) est une flèche f de \mathcal{C} telle que $q \circ f = f = f \circ p$. Vérifier qu'avec la composition de \mathcal{C} comme composition, $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie.

Exercice 2. Soit \mathcal{C} une catégorie. La « catégorie des flèches de \mathcal{C} » a pour objets toutes les flèches de \mathcal{C} et pour flèches de l'objet $f : X \rightarrow Y$ vers l'objet $g : Z \rightarrow T$ les couples de flèches (φ, ψ) telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{\psi} & T \end{array}$$

Définir la composition et les identités et montrer qu'il s'agit bien d'une catégorie.

Exercice 3. Soit \mathcal{C} la catégorie dont les objets sont les paires (X, R) , où X est un ensemble et R une relation d'équivalence sur X . Une flèche de (X, R) vers (Y, S) est une application $f : X \rightarrow Y$, telle que $\forall x \in X \forall y \in X \ xRy \Rightarrow f(x)Sf(y)$. On pose $F((X, R)) = X$ et $G((X, R)) = X/R$ (quotient de X par R). Compléter les définitions de F et G pour en faire des foncteurs de \mathcal{C} vers **Ens** et déterminer toutes les transformations naturelles de F vers G et de G vers F .

Exercice 4. Soient $f, g : G \rightarrow H$ deux morphismes de groupes, qu'on peut voir comme des foncteurs entre les catégories G et H (G et H sont des catégories parce que ce sont des monoïdes). Montrer que pour tout élément $h \in H$, $\bullet \mapsto h$ (où \bullet est l'unique objet de G) est une transformation naturelle de f vers g si et seulement si $\forall x \in G \ g(x) = hf(x)h^{-1}$.

Exercice 5. Soit **Graph** la catégorie des graphes, et G le foncteur qui envoie tout graphe sur le graphe opposé, et tout morphisme de graphe sur lui-même (on vérifiera que c'est bien un foncteur). Montrer qu'il n'existe aucune transformation naturelle de 1 vers G .

Exercice 6. Soit I un ensemble. Soit F le foncteur identité de **Ens**, et $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur défini par $X \mapsto I^{(I^X)}$ et pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$ par $f \mapsto ((I^{(I^X)} \ni \varphi) \mapsto ((I^Y \ni \psi) \mapsto \varphi(\psi \circ f)))$. Trouver toutes les transformations naturelles de F vers G et de G vers F .

Exercice 7. Soit \mathcal{C} un groupoïde non vide, c'est-à-dire une catégorie non vide dont toutes les flèches sont des isomorphismes, et où tous deux objets sont reliés par au moins une flèche. Montrer qu'il existe un groupe, qu'on verra comme une catégorie à un seul objet, et une équivalence de catégories entre ce groupe et \mathcal{C} . (Utiliser l'axiome du choix.)

Exercice 8. (a) Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Vérifier que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ est bien une catégorie. Vérifier que $\pi_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ défini sur les objets par $\pi_1((X, Y)) = X$ et sur les flèches par $\pi_1((f, g)) = f$ est un foncteur. Même chose pour $\pi_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Vérifier que si $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ sont deux foncteurs, alors il existe un unique foncteur $\langle F, G \rangle : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tel que $\pi_1 \circ \langle F, G \rangle = F$ et $\pi_2 \circ \langle F, G \rangle = G$.

(b) Soit $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ un troisième foncteur. Vérifier que $\langle F, G \rangle \circ H = \langle F \circ H, G \circ H \rangle$.

(c) Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ deux foncteurs. Vérifier que si on pose :

- $(F \times G)((X, Y)) = (F(X), G(Y))$, pour tous objets X de \mathcal{C} et Y de \mathcal{E} ,
- $(F \times G)((f, g)) = (F(f), G(g))$, pour toutes flèches f de \mathcal{C} et g de \mathcal{E} ,

on définit un foncteur $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{F}$. Vérifier que $F \times G = \langle F \circ \pi_1, G \circ \pi_2 \rangle$.

(d) Soient les foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{G} & \mathcal{E} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{H} & \mathcal{G} & \xrightarrow{K} & \mathcal{H} \end{array}$$

Vérifier que $(G \circ F) \times (K \circ H) = (G \times K) \circ (F \times H)$.

Exercice 9. Décrire une catégorie $\mathbf{2}$ avec deux objets distincts 0 et 1, et une unique flèche $\alpha : 0 \rightarrow 1$ en-dehors des flèches identités. Montrer que α est un monomorphisme et un épimorphisme, mais n'est pas un isomorphisme.

Autres exemples de flèches à la fois monomorphisme et épimorphisme sans être isomorphisme :

1. $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dans la catégorie des anneaux.
2. $f : A \rightarrow B$ dans la catégorie des espaces de Hausdorff, telle que f est injective et d'image dense sans être surjective.
3. Soit τ et τ' deux topologies sur un ensemble X telles que $\tau' \subset \tau$ et $\tau \neq \tau'$. Alors $f = Id_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ vérifie les conditions.

Exercice 10. Vérifier que toute catégorie \mathcal{C} est isomorphe à la catégorie de foncteurs $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$, où $\mathbf{1}$ est la catégorie à un objet et une flèche. Montrer que la catégorie des flèches d'une catégorie, définie dans l'exercice 2, et la catégorie des graphes sont isomorphes à des catégories de foncteurs d'une manière non triviale, c'est-à-dire avec un exposant distinct de $\mathbf{1}$.

Exercice 11. Une transformation naturelle $\varphi : F \rightarrow G$ est un isomorphisme naturel si et seulement si $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ est un isomorphisme (dans la catégorie \mathcal{D}) pour tout objet X de \mathcal{C} .

Exercice 12. (a) Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Montrer qu'en posant :

- $\mathbf{ev}(F, X) = F(X)$, pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et tout objet X de \mathcal{C} ,
- $\mathbf{ev}(\theta, f) = G(f) \circ \theta_X$, pour toute transformation naturelle $\theta : F \rightarrow G$ et toute flèche f de \mathcal{C} ,

on fait de \mathbf{ev} un foncteur de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}$ vers \mathcal{D} .

(b) Soit \mathcal{E} un troisième catégorie, et $F : \mathcal{E} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Montrer qu'en posant :

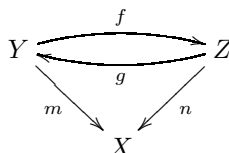
- $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(X) = Y \mapsto F(X, Y)$, pour tous objets X de \mathcal{E} et Y de \mathcal{C} ,
- $\Lambda_{\mathcal{C}}(F)(f) = g \mapsto F(f, g)$, pour toutes flèches f de \mathcal{E} et g de \mathcal{C} ,

on définit un foncteur $\Lambda_{\mathcal{C}}(F) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. Montrer que $\mathbf{ev} \circ (\Lambda_{\mathcal{C}}(F) \times 1_{\mathcal{C}}) = F$ et que $\Lambda_{\mathcal{C}}(\mathbf{ev}) = 1_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}$.

(c) Soit $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ un foncteur. Montrer que $\Lambda_{\mathcal{C}}(F \circ (\Phi \times 1_{\mathcal{C}})) = \Lambda_{\mathcal{C}}(F) \circ \Phi$.

Exercice 13. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Montrer que $\Phi : \mathcal{D}^{(\mathcal{C}^{op})} \rightarrow (\mathcal{D}^{op})^{\mathcal{C}}$ défini sur les objets par $\Phi(F) = F^{op}$ et sur les flèches par $\Phi(\lambda : F \rightarrow G) = \lambda^{op} : F^{op} \rightarrow G^{op}$, où pour tout objet X , $(\lambda^{op})_X = \lambda_X$, est un isomorphisme de catégories.

Exercice 14. Soit un diagramme :



tel que $n \circ f = m$ et $m \circ g = n$, et où m et n sont des monomorphismes. Montrer que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Exercice 15. Dans la catégorie des anneaux unitaires commutatifs (on ne demande pas que 1 soit distinct de 0) montrer que l'unique morphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ n'est pas un monomorphisme.

Exercice 16. Soit \mathcal{D} une sous-catégorie d'une catégorie \mathcal{C} . Soit $f : X \rightarrow Y$ une flèche de \mathcal{D} . Montrer que si f est un monomorphisme dans \mathcal{C} , c'est encore un monomorphisme dans \mathcal{D} . Montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie. Mêmes questions pour des épimorphismes.

Exercice 17. Vérifier que toute flèche qui a une section est un épimorphisme, mais que la réciproque n'est pas vraie, et de même que toute flèche qui a une rétraction est un monomorphisme, mais que la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 18. Vérifier que tout monomorphisme qui a une section, de même que tout épimorphisme qui a une rétraction, est un isomorphisme.

Exercice 19. Soit \mathcal{C} une catégorie dont toutes les flèches ont une rétraction (resp. section). Montrer que toutes les flèches de \mathcal{C} sont des isomorphismes.

Exercice 20. Soit \mathcal{C} une catégorie. Montrer que tout foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$ envoie les épimorphismes sur des épimorphismes, mais qu'un monomorphisme n'est pas nécessairement envoyé sur un monomorphisme.

Exercice 21. Soit \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{D} une sous-catégorie de \mathcal{C} . Soit X un objet de \mathcal{D} .

(a) Montrer que X peut avoir plus de sous-objets dans \mathcal{D} qu'il n'en a dans \mathcal{C} , par exemple, deux dans \mathcal{D} et un seul dans \mathcal{C} .

(b) On suppose maintenant que toute flèche qui est un monomorphisme dans \mathcal{D} en est un dans \mathcal{C} (voir aussi l'exercice 16). Vérifier que la correspondance qui envoie les monomorphismes de cible X de \mathcal{D} sur eux-mêmes dans \mathcal{C} est compatible avec l'équivalence entre monomorphismes. En déduire l'existence d'une application canonique croissante $i : \mathbf{Sub}_{\mathcal{D}}(X) \rightarrow \mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$. Montrer que si de plus \mathcal{D} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} , i est injective. (On peut donc dans ce cas identifier $\mathbf{Sub}_{\mathcal{D}}(X)$ à une sous-collection de $\mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(X)$, d'une manière compatible avec l'ordre.)